Über eine Klasse linearer stochastischer Differentialgleichungen ohne Adaptiertheitsforderung

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Wirtschaftsmathematiker

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Steffen Kläre
geb. am 2. Mai 1976 in Weimar

Betreuer: Prof. Dr. habil. K.-H. Fichtner

Jena, den 27.10.2000

Zusammenfassung

Der Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung linearer stochastischer Differentialgleichungen mit Skorochod-Integral, d. h. ohne Adaptiertheitsforderung ist im Wienerraum in der Regel mit hohem Aufwand verbunden. Der Wienerraum ist jedoch kanonisch isomorph zu einem symmetrischen Fockraum. In diesem Raum lassen sich Skorochod-Integral, Malliavin-Ableitung und Malliavin-Operator als Operatoren von besonders elementaren Typ darstellen.

Diesen Sachverhalt nutzend bestimmen wir zu einer Klasse linearer stochastischer Differentialgleichungen Lösungen, die zunächst im Fockraum ermittelt und dann unter Verwendung der genannten Isomorphismus in den Wienerraum übertragen werden.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Stochastische Differentialgleichungen und damit verknüpfte Probleme bilden ein gehaltvolles Gebiet der Mathematik. Als Grundlage für eine solche Gleichung benötigt man den Begriff des stochastischen Integrals, dessen Integrand ein stochastischer Prozeß sein kann. Eine formale stochastische Differentialgleichung, etwa der Gestalt

$$dX_t = f(t, x_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad (t \in [0, T]), \tag{0.1}$$

mit Anfangswert $X_0 = \eta$ ist dann zu interpretieren als eine Integralgleichung der Form

$$X_t = \eta + \int_0^t ds\, f(s, X_s) + \int_0^t dW_s\, g(s, X_s) \quad (t \in [0, T]),$$

wobei (W_t) ein Wiener-Prozeß ist. In den letzten Jahrzehnten wurde eine Vielzahl stochastischer Integral-Begriffe entwickelt, deren Idee auf K. Itô zurückgeht. Für die Definition des Integrals ist dabei essentiell erforderlich, daß der Integrand adaptiert bezüglich des Integrators (W_t) ist, was im Fall obiger Gleichung auf die Forderung führt, daß X_t für jedes t meßbar ist bezüglich $\mathcal{F}_t := \sigma(\eta; W_s : s \in [0, T])$ und der Anfangswert η unabhängig von $\sigma(W_s : s \in [0, T])$ ist. Ohne derartige Forderungen ist das in der Gleichung aufgestellte Itô-Integral nicht definiert und die Gleichung damit zunächst sinnlos. Eine Verletzung dieser Forderung tritt aber bereits bei recht einfachen Problemen auf. Zum Beispiel gilt für den Preis von Schatzbriefen bzw. Anleihen $Y_0 = Y_T$, also Anfangspreis gleich Endpreis und für $0 < t < T$ ist Y_t zufällig. Die Aufstellung möglicher Gleichungen vom Typ (0.1) zu diesem Problem führt damit zu Widersprüchen bezüglich der Adaptiertheitsforderung. Einen Ausweg bietet ein im Ansatz anderes Konzept der stochastischen Integration, welches wesentlich durch A. V. Skorochod begründet wurde. Das Skorochod-Integral δ ist ein L_2-Operator, und zwar der adjungierte Operator zur Malliavin-Ableitung D. Schon für einfache Typen linearer stochastischer Differentialgleichungen ist es jedoch hier schwierig, Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung nachzuweisen, geschweige denn, deren explizite Darstellung zu finden. Die Ursache dafür ist der recht komplizierte Mechanismus des Skorochod-Integrals im Raum $L_2(P_W)$ der L_2-Funktionale des Wiener-Prozesses. Seit einigen Jahren ist aber bekannt, daß der $L_2(P_W)$ isomorph zu einem symmetrischen Fockraum ist, was implizit schon bei Definition des Skorochod-Integrals benutzt wird. In der Arbeit [4] wird deutlich, daß man unter Benutzung einer isomorphen Darstellung des symmetrischen Fockraums mittels der Punktprozeßtheorie zu besonders einfachen Entsprechungen der Malliavin-Ableitung und des Skorochod-Integrals (und damit auch des Malliavin-Operators) gelangt. Das legt nahe, auch die obige formale stochastische Differentialgleichung mittels des Isomorphismus (unitäre Transformation) in ein entsprechendes Objekt im Fockraum zu verwandeln, das man mathematisch erheblich einfacher behandeln kann. Ziel dieser

Arbeit ist es, diese Idee zu vertiefen. Dazu greifen wir die Methode aus [5] auf, in der ein Typ relativ einfacher nicht adaptierter stochastischer Integralgleichungen mit Bezug auf das Skorochod-Integral betrachtet wurde. Dabei wollen wir eine Gleichung der Form

$$X_t(.) = \eta(.) + \int_0^t ds\, m(s,.)X_s(.) + \int_0^t dW_s\, h(s)X_s(.) \quad (t \in [0,T]) \tag{0.2}$$

mit beliebigen Anfangswert η betrachten.

Im ersten Abschnitt stellen wir die Instrumente zusammen, die wir zur Formulierung und Lösung unseres Problems benötigen.
Dabei stellen wir zunächst in 1.1 den symmetrischen Fockraum $\mathcal{M} = L_2(\widetilde{M}, \mathfrak{M}, F)$ vor, wobei $\widetilde{M}$ die Menge der lokalendlichen Zählmaße über einem meßbaren Raum $[G, \mathfrak{G}]$ mit G polnischer Raum und F das Fockmaß ist. In Lemma 1.4 stellen wir einen unitären Operator $\mathcal{I}$ vor, der sich als Isomorphismus von $\mathcal{M}$ in einen Raum $\mathcal{H}$, der in der Physik als symmetrischer Fockraum bezeichnet wird, erweist. Weiter betrachten wir die kohärenten Funktionen, deren Linearkombinationen dicht in $\mathcal{M}$ liegen (Lemma 1.7).
In 1.2 werden wir die von uns verwendeten Operatoren $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{M}$ und $\mathcal{D}$ auf $L_2(\nu)\otimes\mathcal{M}$ einführen, wobei ν ein σ-endliches diffuses Maß auf $[G, \mathfrak{G}]$ sei, welche sich als isomorph zum Skorochod-Integral δ und der Malliavin-Ableitung D erweisen. Wir bezeichnen deshalb im folgenden $\mathcal{S}$ als das Skorochod-Integral und $\mathcal{D}$ als die Malliavin-Ableitung. Zuletzt werden wir in 1.1 noch die verallgemeinerten Operatoren $\mathcal{S}^c$ auf $\mathcal{M}$ und $\mathcal{D}^c$ auf $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ vorstellen. Schränkt man $\mathcal{D}^c$ auf $L_2(\nu) \otimes \mathcal{M}$ ein, so erhält man die Malliavin-Ableitung $\mathcal{D}$.
In 1.3 führen wir die verallgemeinerte Brownsche Bewegung und das verallgemeinerte Wiener-Integral W auf $[G, \mathfrak{G}, \nu]$ ein. Mit diesen Begriffen entwickeln wir dann den Wienerraum $L_2(P_W)$ und charakterisieren mittels der kohärenten Funktionen einen Isomorphismus $\mathcal{U}$ von $\mathcal{M}$ auf $L_2(P_W)$. Mittels dieses Isomorphismus lassen sich dann die Operatoren δ und D aus $\mathcal{S}$ und $\mathcal{D}$ gewinnen.

In Abschnitt 2 wenden wir uns der Behandlung unseres Problemes zu. Dabei formulieren wir zunächst mit den in Abschnitt 1 eingeführten Instrumenten die Gleichung (0.2) und übertragen sie dann mittels des Isomorphismus $\mathcal{U}$ in den Fockraum. Wir geben für eine verallgemeinerte Fassung der damit im Fockraum gewonnenen Gleichung die eindeutig bestimmte Lösung explizit an (Satz 2.2). Dabei ist es zunächst nicht erforderlich, daß die Lösung im Hilbertraum $\mathcal{M}$ liegt.
Wir betrachten jedoch einige Spezialfälle, bei denen dies gewährleistet ist. Damit ergibt sich die Möglichkeit, die nach Satz 2.2 eindeutigen Lösungen mittels des Isomorphismus in den Wienerraum zu übertragen, was explizite Lösungen von Gleichungen der Gestalt (0.2) ergibt. Abhängig von den jeweiligen Spezialisierungen sehen diese

Lösungen sehr unterschiedlich aus. Auch ist im Gegensatz zu Satz 2.2 kaum erkennbar, wie im Wienerraum ein allgemeiner Typ von Prozeß aussehen könnte, aus dem sich die betrachteten Beispiele als Spezialfälle ergeben würden. Das wiederum läßt die Vermutung aufkommen, daß zumindest bei linearen Ansätzen der Fockraum das natürlichere Konzept zur Untersuchung stochastischer Differentialgleichungen darstellt.

Der Abschnitt 3 ist dem Beweis von Satz 2.2 gewidmet.

1 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt wollen wir die zur Formulierung unseres Problemes benötigten Begriffe zusammenstellen. Dabei folgen wir im wesentlichen den Darstellungen in [4]. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf reellwertige Funktionen und Vektorräume.

1.1 Der symmetrische Fockraum

Sei G ein polnischer Raum, d. h. ein vollständiger separabler topologischer metrisierbarer Raum. Mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir die σ-Algebra der Borelmengen und mit $\mathcal{B}$ das System der beschränkten Mengen aus $\mathfrak{G}$. Weiter sei ν ein lokal endliches, diffuses Maß auf $\mathfrak{G}$, d. h. $\nu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{B}$ und $\nu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in G$.

Der klassische Fockraum

Es seien $[G^k, \mathfrak{G}^k, \nu^k]$ das k-fache Produkt des Maßraums $[G, \mathfrak{G}, \nu]$, $\langle ., . \rangle_k$ das Skalarprodukt auf $L_2([G^k, \mathfrak{G}^k, \nu^k]) =: L_2(\nu^k)$ und $\|.\|_k$ die korrespondierende L_2-Norm. Der *symmetrische Fockraum* $\mathcal{H}$ ist der lineare Raum der Folgen $\big(f_k\big)_{k\geq 0}$, wobei f_0 ein Element des Hilbertraums der reellen Zahlen und für $k \geq 1$ jedes f_k ein symmetrisches Element des $L_2(\nu^k)$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_k^2 < \infty$$

sei. $\mathcal{H}$ wird zu einem Hilbertraum, wenn man ihn mit dem folgenden Skalarprodukt ausstattet:

$$\langle \big(f_k\big)_{k=0}^{\infty}, \big(g_k\big)_{k=0}^{\infty} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_k, g_k \rangle_k.$$

Da $L_2(\nu)$ separabel ist, können wir $L_2(\nu^k)$ mit dem Tensorprodukt $L_2(\nu)^{\otimes k}$ identifizieren. Mit Hilfe dieser Identifikation charakterisieren wir den üblicherweise auf diesem Tensorprodukt definierten Symmetrisierungsoperator σ_n durch

$$\sigma_n f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum f(x_1, \ldots, x_n) \quad (f \in L_2(\nu^k)),$$

wobei die Summation über alle Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ erfolgt. Sei nun $\mathcal{H}_n$ der Unterraum von $\mathcal{H}$ der Folgen $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $f_k \equiv 0$ für $k \neq n$. Offensichtlich können wir $\mathcal{H}_n$ mit dem Raum der symmetrischen Elemente aus $L_2(\nu^n)$ und dem Eigenraum des Operators σ_n identifizieren. Außerdem ist $\mathcal{H}$ die orthogonale Summe der Räume $\mathcal{H}_n$.

Eine isomorphe Darstellung des symmetrischen Fockraumes

Wir wollen nun den symmetrischen Fockraum in Form eines L_2 über dem Raum der Zählmaße über G darstellen. Wir bezeichnen die nichtnegativen ganzen Zahlen mit $\mathbb{N}_0$.

Definition 1.1. *Ein* Zählmaß *ist ein lokal endliches Maß auf* $[G, \mathfrak{G}]$ *mit Werten in* $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. *Genauer ist es ein Element der Menge*

$$\widetilde{M} = \big\{\varphi : \varphi \textit{ ist ein Maß auf } [G, \mathfrak{G}] \textit{ mit } \varphi(A) \in \mathbb{N}_0 \textit{ für alle } A \in \mathcal{B}\big\}. \tag{1.1}$$

Jedes Element $\varphi \in \widetilde{M}$ kann als lokal endliches Punktsystem im Phasenraum G interpretiert werden. Genauer gehört ein Maß φ auf $[G, \mathfrak{G}]$ genau dann zu $\widetilde{M}$, wenn es in der Form

$$\varphi = \sum_{j \in J} \delta_{x_j} \tag{1.2}$$

geschrieben werden kann, wobei δ_x das Diracmaß zu $x \in G$ bezeichnet und J eine höchstens abzählbare Indexmenge sei, so daß die Menge $\{x_j : j \in J\}$ keine Häufungspunkte hat. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die σ-Algebra über $\widetilde{M}$, die durch die Abbildungen $\varphi \mapsto \varphi(A)$, $A \in \mathcal{B}$ erzeugt wird. Offensichtlich ist die Menge $M^f = \{\varphi : \varphi(G) < \infty\}$ der endlichen Zählmaße eine meßbare Teilmenge von $\widetilde{M}$.

Definition 1.2. *Ein* Punktprozeß *ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $[\widetilde{M}, \mathfrak{M}]$. *Ein Punktprozeß P heißt endlich, wenn $P(M^f) = 1$ gilt.*

Wegen der obigen Interpretation von Zählmaßen kann man einen Punktprozeß auch als Wahrscheinlichkeitsgesetz eines zufälligen Punktsystems in G auffassen.
Wir führen das Maß F auf $[\widetilde{M}, \mathfrak{M}]$ ein, indem wir für $B \in \mathfrak{M}$ setzen:

$$F(B) = \chi_B(\mathfrak{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \nu^n(d[x_1, \ldots, x_n])\, \chi_B\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}\Bigg), \tag{1.3}$$

wobei $\mathfrak{o}$ die leere Punktkonfiguration, d. h. das Nullmaß auf $[G, \mathfrak{G}]$ bezeichne. F ist ein σ-endliches Maß konzentriert auf M^f. Ist ν sogar ein endliches Maß, dann ist auch F endlich. Genauer erhalten wir dann $F(\widetilde{M}) = \exp(\nu(G))$. Das normierte Maß $P = F/F(\widetilde{M})$ ist ein Poissonscher Punktprozeß mit Intensitätsmaß ν (siehe dazu auch [7]). Wir bezeichnen den Hilbertraum $L_2(\widetilde{M}, \mathfrak{M}, F)$ mit $\mathcal{M}$.

Definition 1.3. *Ein Maß $\varphi \in \widetilde{M}$ heißt* einfach*, falls gilt $\varphi(\{x\}) \leq 1$ für alle $x \in G$. Wir bezeichnen mit M die Menge aller einfachen Zählmaße.*

Für $n \geq 0$ bezeichne $M_n = \{\varphi \in \widetilde{M} : \varphi(G) = n\}$ die meßbare Menge aller n-Punkt-Konfigurationen. Wir setzen $\mathcal{M}_n = L_2(M_n, M_n \cap \mathfrak{M}, F)$. Da die Mengen M_n paarweise disjunkt sind und wegen

$$M^f = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$$

erhalten wir die folgende orthogonale Zerlegung von $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

Lemma 1.4. [Theorem 2.3.1 aus [4]] *Sei $n \geq 1$. Wir wählen $x_1, \ldots, x_n \in G$ und $\psi \in \mathcal{M}_n$ und setzen*

$$\mathcal{I}_n \Psi(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{2}} \Psi\Big(\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}\Big). \tag{1.4}$$

Dann definiert (1.4) einen Isomorphismus $\mathcal{I}_n$ von $\mathcal{M}_n$ auf $\mathcal{H}_n$.

Wir setzen $\mathcal{I}_0\Psi := \Psi(\mathfrak{o})$. Weil wir die orthogonalen Zerlegungen

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

haben, erhalten wir einen Isomorphismus $\mathcal{I}$ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{H}$. Aus diesem Grund kann man $\mathcal{M}$ auch als *symmetrischen Fockraum* über G bezeichnen.

Definition 1.5. *Für $x_1, \ldots, x_n \in G$, $n \geq 1$ und jedes $g : G \to \mathbb{R}$ assoziieren wir eine Abbildung $\Psi_g \in \mathcal{M}$ durch*

$$\Psi_g(\mathfrak{o}) = 1, \quad \Psi_g\Big(\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}\Big) = \prod_{j=1}^{n} g(x_j). \tag{1.5}$$

Wir bezeichnen Ψ_g als die zu $g \in L_2(\nu)$ gehörige kohärente Funktion.

Wir werden die folgenden allgemein bekannten Eigenschaften der kohärenten Funktion nutzen:

Lemma 1.6. [Lemma 2.2 aus [3]] *Seien f, g Funktionen von G in $\mathbb{R}$ und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in M$. Dann gilt:*

$$\Psi_f(\varphi_1 + \varphi_2) = \Psi_f(\varphi_1) \cdot \Psi_f(\varphi_2), \tag{1.6}$$

$$\Psi_{f+g}(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \leq \varphi} \Psi_f(\widehat{\varphi}) \cdot \Psi_g(\varphi - \widehat{\varphi}), \tag{1.7}$$

$$\Psi_{f \cdot g}(\varphi) = \Psi_f(\varphi) \cdot \Psi_g(\varphi). \tag{1.8}$$

Die Summation in (1.7) erfolgt über alle $\widehat{\varphi}$ mit $\widehat{\varphi}(A) \leq \varphi(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}$. Man beachte, daß $\Psi_g \in \mathcal{M}$ genau dann gilt, wenn $g \in L_2(\nu)$. In diesem Fall errechnet sich für die Norm von Ψ_g, $g \in L_2(\nu)$:

$$\|\Psi_g\|^2_{\mathcal{M}} = \exp\big(\|g\|^2_{L_2(\nu)}\big). \tag{1.9}$$

In [4] wird das folgende wichtige Resultat bewiesen:

Lemma 1.7. [Proposition 2.3.2 aus [4]] *Die Linearkombinationen der kohärenten Funktionen Ψ_g $(g \in L_2(\nu))$ liegen dicht in $\mathcal{M}$.*

1.2 Operatoren im symmetrischen Fockraum

In diesem Abschnitt führen wir unter anderem die Operatoren $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{S}$ auf $L_2(\nu) \otimes \mathcal{M}$ ein, welche isomorph zur Malliavin-Ableitung bzw. dem Skorochod-Integral sind. Der Vorteil der auf diese Weise gewonnenen Darstellung von Malliavin-Ableitung bzw. Skorochod-Integral besteht darin, daß $\mathcal{D}$ und $\mathcal{S}$ eine besonders einfache Form haben.
Wir bezeichnen im weiteren mit $Dom(\mathcal{A})$ das Definitionsgebiet eines Operators $\mathcal{A}$.

Definition 1.8. *Der Operator $\mathcal{D} : Dom(\mathcal{D}) \to L_2(\nu \times F)$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{D}\Psi(x, \varphi) = \Psi(\varphi + \delta_x) \quad (\Psi \in Dom(\mathcal{D}),\, \varphi \in M,\, x \in G), \tag{1.10}$$

mit

$$Dom(\mathcal{D}) = \left\{\Psi \in \mathcal{M} : \int F(d\varphi)\, \varphi(G) \cdot |\Psi(\varphi)|^2 < \infty\right\}.$$

Man zeigt leicht, daß für alle $g \in L_2(\nu)$ die zugehörige kohärente Funktion Ψ_g ein Element von $Dom(\mathcal{D})$ ist. Deshalb und wegen Lemma 1.7 ist $\mathcal{D}$ durch seine Einschränkung auf die Menge der kohärenten Funktionen charakterisierbar. Dazu haben wir folgendes Lemma:

Lemma 1.9. [Theorem 3.1.3 aus [4]] *Sei $g \in L_2(\nu)$. Dann ist $\Psi_g \in Dom(\mathcal{D})$ und es gilt*

$$\mathcal{D}\Psi_g(x, \varphi) = g(x) \cdot \Psi_g(\varphi) \tag{1.11}$$

für alle $\varphi \in M$ und alle $x \in G$.

Bemerkung. Die Räume $L_2(\nu)$ und $\mathcal{M}$ sind separabel und demzufolge ist $L_2(\nu \times F)$ isomorph zu $L_2(\nu) \otimes \mathcal{M}$. Genauer gesagt kann man $\mathcal{D}$ als einen Operator von $\mathcal{M}$ in $L_2(\nu) \otimes \mathcal{M}$ betrachten. Damit läßt sich (1.11) wie folgt schreiben:

$$\mathcal{D}\Psi_g = g \otimes \Psi_g \quad (g \in L_2(\nu)). \tag{1.12}$$

In [4] wird gezeigt, daß der folgende auf $L_2(\nu \times F)$ definierte Operator $\mathcal{S}$ der zu $\mathcal{D}$ adjungierte Operator ist:

Definition 1.10. *Der lineare Operator $\mathcal{S} : Dom(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{S}u(\varphi) = \int \varphi(dx)\, u(x, \varphi - \delta_x) \quad (u \in Dom(\mathcal{S})) \tag{1.13}$$

mit

$$Dom(\mathcal{S}) = \left\{u \in L_2(\nu \times F) : \int F(d\varphi) \Big| \int \varphi(dx)\, u(x, \varphi - \delta_x)\Big|^2 < \infty\right\}.$$

Lemma 1.11. [Lemma 3.2.3 in [4]] *Die Abbildung* $\Psi \in \mathcal{M}$ *erfülle*

$$\int F(d\varphi)\left(\varphi(G)\right)^2 |\Psi(\varphi)|^2 < \infty. \tag{1.14}$$

Dann ist $\Psi \in Dom(\mathcal{D})$ *und* $\mathcal{D}\Psi \in Dom(\mathcal{S})$.

Bemerkung. Wegen $\Psi_g \in Dom(\mathcal{D})$ für $g \in L_2(\nu)$ ist $\mathcal{D}\Psi_g \in Dom(\mathcal{S})$.

Weiter gilt folgendes Lemma:

Lemma 1.12. [Lemma 3.2.2 aus [4]] *Der Raum* $Dom(\mathcal{S})$ *liegt dicht in* $L_2(\nu \times F)$.

Als nächstes wollen wir einen Operator einführen, der sich als isomorph zum Malliavin-Operator erweist (vgl. [4]).

Definition 1.13. *Wir bezeichnen mit* $\mathcal{N}$ *den linearen Operator aus* $\mathcal{M}$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned} Dom(\mathcal{N}) &= \left\{\Psi \in \mathcal{M} : \int F(d\varphi)\left(\varphi(G)\right)^2 \cdot |\Psi(\varphi)|^2 < \infty,\ \varphi \in M\right\}, \\ \mathcal{N}\Psi(\varphi) &= \varphi(G) \cdot \Psi(\varphi) \quad (\Psi \in Dom(\mathcal{N}),\ \varphi \in M). \end{aligned}$$

Wir haben mit $\mathcal{N}$ den gewöhnlichen Teilchenzahloperator der Quantenmechanik. Weiter gilt für $\varphi \in M$:

$$\mathcal{N}(\varphi) = \varphi(\mathbf{T}) =: |\varphi|. \tag{1.15}$$

Lemma 1.14. [Theorem 3.3.1 aus [4]] *Es gilt* $\Psi \in Dom(\mathcal{N})$ *genau dann, wenn* $\Psi \in Dom(\mathcal{D})$ *und* $\mathcal{D}\Psi \in Dom(\mathcal{S})$*, und in diesem Fall ist* $\mathcal{N}\Psi = \mathcal{S}(\mathcal{D}\Psi)$.

Mit Lemma 1.14 haben wir also folgende Darstellung:

$$\mathcal{N} = \mathcal{S}\mathcal{D}. \tag{1.16}$$

Wir wollen nun noch zwei unbeschränkte Operatoren einführen, welche eine Verallgemeinerung der Operatoren $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{S}$ sind und deren Wirkungsweise auf die kohärenten Funktionen durch (1.6) und (1.7) charakterisiert ist. Dazu zitieren wir aus [3].

Der Operator $\mathcal{D}^c : Dom(\mathcal{D}^c) \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$, der auf dem dichten Definitionsgebiet $Dom(\mathcal{D}^c) \subset \mathcal{M}$, welches die kohärenten Funktionen enthält und durch

$$\mathcal{D}^c\Psi(\varphi_1, \varphi_2) := \Psi(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (\Psi \in Dom(\mathcal{D}^c),\ \varphi_1, \varphi_2 \in M) \tag{1.17}$$

gegeben ist, heißt *zusammengesetzte Malliavin-Ableitung.*
Der Operator $\mathcal{S}^c : Dom(\mathcal{S}^c) \to \mathcal{M}$, der auf dem dichten Definitionsgebiet $Dom(\mathcal{S}^c) \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$, welches Tensorprodukte von kohärenten Funktionen enthält und durch

$$\mathcal{S}^c u(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \le \varphi} u(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) \quad (u \in Dom(\mathcal{S}^c),\ \varphi \in M) \tag{1.18}$$

gegeben ist, heißt *zusammengesetztes Skorochod-Integral.* $\mathcal{S}^c$ und $\mathcal{D}^c$ sind zueinander adjungiert, d. h. für alle $\Psi \in Dom(\mathcal{D}^c)$ und alle $u \in Dom(\mathcal{S}^c)$ gilt

$$\langle \mathcal{D}^c\Psi, u\rangle_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}} = \langle \Psi, \mathcal{S}^c u\rangle_{\mathcal{M}}.$$

Aus (1.6) und (1.7) erhalten wir unmittelbar

$$\mathcal{D}^c\Psi_g = \Psi_g \otimes \Psi_g \quad (g \in L_2(\nu)) \tag{1.19}$$

$$\mathcal{S}^c(\Psi_g \otimes \Psi_h) = \Psi_{g+h} \quad (g, h \in L_2(\nu)). \tag{1.20}$$

1.3 Der Wienerraum

Im folgenden wollen wir erläutern, inwiefern der Wienerraum isomorph zum symmetrischen Fockraum ist. Dazu zunächst folgende Definition:

Definition 1.15. *Sei $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und N_{0,σ^2} bezeichne die Normalverteilung auf der reellen Achse mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 (für $\sigma = 0$ erhalten wir das Dirac-Maß zum Punkt 0). Eine Familie $(\omega(A))_{A\in\mathcal{B}}$ von Zufallsvariablen auf Ω heißt* verallgemeinerte Brownsche Bewegung*, wenn gilt:*

(1) jede Zufallsvariable $\omega(A)$ hat das Verteilungsgesetz $N_{0,\nu(A)}$ und

(2) für paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{B}$ sind die Zufallsvariablen $\omega(A_1), \dots, \omega(A_n)$ unabhängig.

Analog zur Konstruktion des gewöhnlichen Wienerintegrals wollen wir nun ein verallgemeinertes Wienerintegral einführen. Wir wählen paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{B}$, Zahlen $a_1, \dots, a_n$ und definieren das Integral der zugehörigen Treppenfunktion $f = \sum a_j \chi_{A_j}$ durch

$$W(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \omega(A_j),$$

wobei χ_A die Indikatorfunktion zur Menge A bezeichnet. Es gilt also $W(\chi_A) = \omega(A)$ für $A \in \mathcal{B}$. Offensichtlich ist durch W eine lineare Abbildung vom Teilraum der Treppenfunktionen aus $L_2(\nu)$ in $L_2(P)$ definiert, die das Skalarprodukt erhält. Der abgeschlossene lineare Unterraum $\mathcal{W}$ von $L_2(P)$, der durch die Funktionen $\omega(A)$, $A \in \mathcal{B}$ aufgespannt wird, ist ein Hilbertraum mit dem aus $L_2(P)$ übernommenen Skalarprodukt. Da die Treppenfunktionen dicht in $L_2(\nu)$ liegen, kann das Integral zu einem Isomorphismus von $L_2(\nu)$ auf $\mathcal{W}$ erweitert werden. Die Abbildung $W(f)$ heißt *verallgemeinertes Wienerintegral* von f. Aufgrund dieser Konstruktion sind alle Elemente aus $\mathcal{W}$ normalverteilt, und endliche Familien paarweise orthogonaler Elemente sind unabhängig. $\mathcal{F}_W$ sei die durch die Elemente aus $\mathcal{W}$ erzeugte σ-Algebra über Ω, P_W die Einschränkung von P auf $\mathcal{F}_W$. Der *Wienerraum* ist definiert durch $L_2([\Omega, \mathcal{F}_W, P_W]) =: L_2(P_W)$.

In [4] wird ein Isomorphismus $\mathcal{J}$ diskutiert, der zwischen den Räumen $\mathcal{H}$ und $L_2(P_W)$ wirkt. Eine genauere Beschreibung dieses Isomorphismus ist für diese Arbeit unwesentlich. In Verbindung mit dem in (1.4) eingeführten Isomorphismus zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{H}$ erhalten wir einen Isomorphismus $\mathcal{U} := \mathcal{J} \circ \mathcal{I}$ zwischen $\mathcal{M}$ und $L_2(P_W)$, der durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist:

Lemma 1.16. [Theorem 2.4.1 aus [4]] *Es gibt genau einen Isomorphismus $\mathcal{U}$ von $\mathcal{M}$ auf $L_2(P_W)$, der durch*

$$\mathcal{U}(\Psi_g) = \exp(W(g) - \frac{1}{2}\|g\|^2) \quad (g \in L_2(\nu)) \tag{1.21}$$

charakterisiert ist.

Ein Isomorphismus ist gemäß Definition linear, es gilt also insbesondere für $c \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{U}(c \cdot \Psi) = c \cdot \mathcal{U}\Psi \quad (\Psi \in \mathcal{M}). \tag{1.22}$$

Wir können die Indikatorfunktion $\chi_{M_0} = \chi_{\emptyset}$ mit der kohärenten Funktion Ψ_0 identifizieren. Dann erhalten wir mittels Lemma 1.16 und (1.22):

$$\mathcal{U}(c \cdot \chi_{M_0}) = \mathcal{U}(c \cdot \Psi_0) \equiv c \cdot 1 \equiv c. \tag{1.23}$$

Mittels des Isomorphismus $\mathcal{U}$ können wir nun Operatoren D und γ auf $L_2(P_W)$ bzw. δ auf $L_2(\nu \times P_W)$ wie folgt einführen (vgl. [4]):

$$\delta = \mathcal{U}\mathcal{S}(\mathbb{1}_{L_2(\nu)} \otimes \mathcal{U}^{-1}), \tag{1.24}$$

$$\mathrm{D} = (\mathbb{1}_{L_2(\nu)} \otimes \mathcal{U})\mathcal{D}\mathcal{U}^{-1}, \tag{1.25}$$

$$\gamma = \mathcal{U}\mathcal{N}\mathcal{U}^{-1}, \tag{1.26}$$

wobei $\mathbb{1}_{L_2(\nu)}$ die identische Abbildung auf $L_2(\nu)$ bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf den Spezialfall $G = \mathbf{T} := [0, T]$ $(T > 0)$. Dabei erweist sich δ als das Skorochod-Integral, d. h., der Schreibweise aus [8] folgend haben wir

$$\delta(f)(\omega) = \int dW_s\, f(s, \omega) \quad (\omega \in \Omega). \tag{1.27}$$

Weiter hat das Skorochod-Integral folgende Eigenschaft:

Lemma 1.17. [Proposition 3.5 in [9]] *Sei $F \in L_2(P_W)$ und $f \in L_2(\nu)$. Dann ist $f \otimes F$ Skorochod-integrierbar und es gilt:*

$$\delta(f \otimes F) = F \cdot \delta(f \otimes \mathbf{1}) - \langle D(F), f \rangle_{L_2(\nu)}. \tag{1.28}$$

Die durch (1.25) und (1.26) eingeführten Operatoren D und γ erweisen sich als die Malliavin-Ableitung bzw. den Malliavin-Operator. Für die vorliegende Arbeit ist die obige Definition dieser Operatoren ausreichend. Weitere Informationen können aus [8] bzw. [9] entnommen werden.

2 Problemstellung und Resultate

In diesem Abschnitt werden wir eine stochastische Integralgleichung im Wienerraum aufstellen, in den Fockraum übertragen, dort allgemein lösen und anhand von Beispielen den Übertrag der Lösung in den Wienerraum demonstrieren.
Wir spezialisieren dazu zunächst $[G, \mathfrak{G}, \nu]$ durch $[\mathbf{T}, \mathfrak{B}, \lambda]$, wobei $\mathbf{T} = [0, T]$ $(T > 0)$ ein reelles endliches Intervall, $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen über $\mathbf{T}$ und λ das Lebesgue-Maß bezeichnen.

2.1 Eine stochastische Integralgleichung

Wir wollen eine stochastische Integralgleichung mit Bezug auf das Skorochod-Integral im Wienerraum betrachten. Dazu definieren wir zunächst das lineare Funktional $\Lambda : L_2(\lambda) \to \mathbb{R}$ durch

$$\Lambda(f) := \int_0^T \lambda(ds)\, f(s) \quad (f \in L_2(\lambda)). \tag{2.1}$$

Mittels der Hölderschen Ungleichung (siehe z. B. [10], Abschnitt 14.6.2) erhalten wir:

$$|\Lambda(f)| \leq \|f\|_{L_2(\lambda)} \cdot \big(\lambda(\mathbf{T})\big)^{\frac{1}{2}} \quad (f \in L_2(\lambda)),$$

also ist Λ genau dann beschränkt, wenn das Intervall $\mathbf{T}$ endlich ist, was wir bereits vorausgesetzt haben.
Wir setzen noch

$$\Lambda_W := \Lambda \otimes \mathbb{1}_{L_2(P_W)} : L_2(\lambda \times P_W) = L_2(\lambda) \otimes L_2(P_W) \to L_2(P_W), \tag{2.2}$$
$$\Lambda_F := \Lambda \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{M}} : L_2(\lambda \times F) = L_2(\lambda) \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \tag{2.3}$$

wobei $\mathbb{1}_{L_2(P_W)}$ die identische Abbildung auf $L_2(P_W)$ und $\mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ die identische Abbildung auf $\mathcal{M}$ bezeichnen. Offensichtlich gilt dann auch

$$\Lambda_W = (\mathbb{1}_{L_2(\lambda)} \otimes \mathcal{U})\Lambda_F(\mathbb{1}_{L_2(\lambda)} \otimes \mathcal{U}^{-1}). \tag{2.4}$$

Aus Gründen der Lesbarkeit vereinbaren wir noch folgende Schreibweisen:
Wir setzen für das Lebesgue-Integral

$$\int_0^t ds\, f(s) := \int \lambda(ds)\, f(s) \cdot \chi_{[0,t)}(s) \quad (t \in \mathbf{T}).$$

Weiter schreiben wir

$$\int_0^t dW_s\, g(s,.) := \int dW_s\, g(s,.) \cdot \chi_{[0,t)}(s) \quad (t \in \mathbf{T})$$

für Integrale mit Wienerprozessen als Integratoren und

$$\int_0^t \varphi(ds)\beta(s,\varphi) := \int \varphi(ds)\,\beta(s,\varphi)\cdot\chi_{[0,t)}(s) \quad (\varphi \in M, t \in \mathbf{T})$$

für Integrale mit Zählmaßen als Integratoren. Die Integration nach einem Zählmaß ergibt eine Summe des folgenden Typs:

$$\int_0^t \varphi(ds)\,\beta(s,\varphi) = \sum_{\substack{\delta x_j \leq \varphi \\ x_j \in [0,t)}} \beta(x_j,\varphi).$$

Die Funktionen f, g und β seien dabei geeignete L_2-Elemente.

Wir wollen nun eine stochastische Integralgleichung der Form

$$X_t = c + \int_0^t dW_s\,h(s)\cdot X_s + \int_0^t ds\,m(s)\cdot X_s \quad (t \in \mathbf{T}) \tag{2.5}$$

betrachten, wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant und $h, m \in L_2(\lambda)$ sein sollen.
Ein Prozeß $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ heißt *adaptiert*, wenn X_t für jedes $t \in \mathbf{T}$ meßbar bezüglich $\mathcal{F}_t := \sigma(\eta; W_s : s \in \mathbf{T})$ und der Anfangswert η unabhängig von $\sigma(W_S : s \in \mathbf{T})$ ist. Der durch (2.5) gegebene Prozeß ist adaptiert, und das enthaltene stochastische Integral ist ein Itô-Integral. Für die Lösung einer solchen Gleichung ist die Theorie schon weit fortgeschritten.
Wir werden aber später allgemeinere Anfangsbedingungen zulassen, insbesondere kann sie abhängig vom Prozeß (W_t) sein, wodurch die Adaptiertheitsbedingung verletzt wird. Dann läßt sich die Gleichung nicht mehr mit dem Itô-Integral aufstellen. Setzen wir nun das Skorochod-Integral anstelle des Itô-Integrals ein, so sind wir in der Lage, Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu machen. Die Schwierigkeit, diese Aussagen zu beweisen, kann man in [2] nachvollziehen.

Wegen (2.2) und (1.27) können wir die Gleichung (2.5) auch in der folgenden Form schreiben:

$$X_t = c + \delta\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) + \Lambda_W\big((m\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.6}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{1}_{L_2(P_W)}$ die Abbildung identisch 1 aus $L_2(P_W)$ und für $X \in L_2(\lambda \times P_W)$ und $t \in \mathbf{T}$ schreiben wir $X_t(.) = X(t,.)$. Für $h^2(s) \equiv \sigma^2 > 0$ und $m(s) \equiv \mu \in \mathbb{R}$ erhalten wir als Lösung von (2.5) bzw. (2.6) den Spezialfall der geometrischen Brownschen Bewegung (siehe (2.25)), welcher u. a. in der Finanzmathematik zur Berechnung von Optionspreisen genutzt wird (vgl. auch [6]). Wir werden dieses Beispiel später nochmals aufgreifen.

2.2 Die Gleichung im Fockraum

Wir wollen nun die Gleichung (2.6) mittels der Umkehrung des Isomorphismus $\mathcal{U}$ in den Fockraum $\mathcal{M}$ übertragen. Wir erhalten dabei unter Anwendung von (1.24), (2.4) und (1.23) folgende Gleichung:

$$G_t = c \cdot \chi_{M_0} + \mathcal{S}\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{M}}) \cdot G\big) + \Lambda_F\big((m\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{M}}) \cdot G\big) \quad (t \in \mathbf{T}), \tag{2.7}$$

wobei

$$G_t = \mathcal{U}^{-1} X_t \mathcal{U} \quad \text{bzw.} \quad G = (\mathbb{1}_{L_2(\lambda)} \otimes \mathcal{U}^{-1}) X (\mathbb{1}_{L_2(\lambda)} \otimes \mathcal{U}) \quad (t \in \mathbf{T}) \tag{2.8}$$

zu setzen ist. Dabei ist $G_t \in L_2(F)$ für $t \in \mathbf{T}$ und $G_t(\varphi) = G(t, \varphi) \in L_2(\lambda \times F)$. Die Gleichung (2.7) läßt sich für $t \in \mathbf{T}$ und $\varphi \in M$ in folgender Form schreiben (siehe (1.13) und (2.3)):

$$G_t(\varphi) = c \cdot \chi_{M_0}(\varphi) + \int_0^t \varphi(ds)\, h(s) \cdot G_s(\varphi - \delta_s) + \int_0^t ds\, m(s) \cdot G_s(\varphi). \tag{2.9}$$

Wir verallgemeinern (2.9) nun dahingehend, daß wir $c \cdot \chi_{M_0}$ durch $\Phi : M \to \mathbb{R}$, $m(s) \in L_2(\lambda)$ durch $m : \mathbf{T} \times M \to \mathbb{R}$ und $h(s) \in L_2(\lambda)$ durch $h : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ beliebig ersetzen.
Als nächstes werden wir die Gleichung (2.9) in ihrer damit verallgemeinerten Form

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) + \int_0^t \varphi(ds)\, h(s) \cdot G_s(\varphi - \delta_s) + \int_0^t ds\, m(s, \varphi) \cdot G_s(\varphi) \quad (t \in \mathbf{T},\ \varphi \in M) \tag{2.10}$$

lösen und anhand von Beispielen den Übertrag der eindeutig bestimmten Lösung in den Wienerraum demonstrieren.

2.3 Die Lösung im Fockraum

Wir verwenden, daß eine sogenannte *meßbare Indizierung* der Maße $\varphi \in M$ existiert (vgl. [7]):

Lemma 2.1. *Es sei $\varphi \in M \setminus \{\mathfrak{o}\}$. Dann existiert genau eine Folge $(x_j)_{j=1}^{|\varphi|} = \big(x_j(\varphi)\big)_{j=1}^{|\varphi|}$ mit*

$$0 < x_1 < \cdots < x_{|\varphi|} < T \tag{2.11}$$

und

$$\varphi = \sum_{j=1}^{|\varphi|} \delta_{x_j} \bigg(= \sum_{j=}^{|\varphi|} \delta_{x_j(\varphi)} \bigg); \tag{2.12}$$

und die Abbildungen $x_k : M \to \mathbf{T}$, $k = 1, \ldots, |\varphi|$ sind $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$-meßbar.

Wir ergänzen die Folge $(x_j)_{j=1}^{|\varphi|}$ durch $x_0(\varphi) := 0$. Weiter definieren wir die Abbildung $k_{t_1,t_2} : M \to \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ durch

$$k_{t_1,t_2}(\varphi) = \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} ds\, m(s,\varphi)\right) \quad (\varphi \in M). \tag{2.13}$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß für alle $\varphi \in M$ die Abbildungen $m(.,\varphi)$ stetig in $\big[x_j(\varphi), x_{j+1}(\varphi)\big)$, $j = 0,1,\ldots,|\varphi|-1$ und $\big[x_{|\varphi|}, x_T\big]$ ist und der linksseitige Limes $\lim\limits_{s\to x_j-0} m(s,\varphi)$ für $j = 1,\ldots,|\varphi|-1$ existiert. (2.14)

Wie man leicht nachrechnet, gilt für $t_1 < t_2 < t_3$:

$$k_{t_1,t_2}(\varphi) \cdot k_{t_2,t_3}(\varphi) = k_{t_1,t_3}(\varphi) \quad (\varphi \in M). \tag{2.15}$$

Wir definieren weiter für $t \in \mathbf{T}$ die Abbildung $K_t : M \times M \to \mathbb{R}$, indem wir für $0 < x_1 < \cdots < x_n < T$, $n \geq 1$ und $\varphi \in M$ setzen (dabei sei $x_{n+1} = t$ falls $x_n < t$):

$$\begin{aligned} K_t(\mathfrak{o},\varphi) &= k_{0,t}(\varphi) \\ K_t\left(\sum_{j=1}^n \delta_{x_j}, \varphi\right) &= \begin{cases} k_{0,x_1}(\varphi)\cdot\Big(\prod_{j=1}^n k_{x_j,x_{j+1}}\big(\varphi + \sum_{r=1}^j \delta_{x_r}\big)\Big) & (x_n < t), \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Wir können nun den folgenden Satz formulieren, der in Abschnitt 3 bewiesen wird.

Satz 2.2. *Für $h : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$, $\Phi : M \to \mathbb{R}$ und $m : \mathbf{T} \otimes M \to \mathbb{R}$ mit (2.14) hat die Gleichung (2.10) eine eindeutig bestimmte Lösung, und diese hat die Gestalt*

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi}\leq\varphi} \Psi_h(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) \quad (t \in \mathbf{T},\, \varphi \in M). \tag{2.17}$$

Bemerkung. Ist die Lösung ein L_2-Element, also $G_t \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbf{T}$ und $G \in L_2(\lambda \times F)$, so läßt sich (2.17) mittels des erweiterten Skorochod-Integrals $\mathcal{S}^c$ auch in der folgenden Form schreiben:

$$G_t = \mathcal{S}^c\big((\Psi_h \otimes \Phi)K_t\big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.18}$$

2.4 Beispiele

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit einigen Beispielen. Wir behandeln dabei adaptierte und nicht adaptierte Fälle und weisen auf die Unterschiede in der Struktur der Lösung im Wienerraum hin.

Beispiel 1

Es seien $m : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbf{T}$, $h \in L_2(\lambda)$ beliebig und $\Phi = c \cdot \chi_{M_0}$, $c \neq 0$. Offensichtlich sind damit die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt und die Funktion k_{t_1,t_2}, $t_1 < t_2$ hat für $\varphi \in M$ folgende Gestalt

$$k_{t_1,t_2}(\varphi) = \exp\Big(\int_{t_1}^{t_2} ds\, m(s)\Big), \tag{2.19}$$

sie ist also unabhängig von $\varphi \in M$. Damit ergibt sich für $t \in \mathbf{T}$:

$$K_t(\varphi,\psi) = \exp\big(\int_0^t ds\, m(s)\big) =: \varrho(t) \quad (\varphi,\psi \in M). \tag{2.20}$$

Damit läßt sich (2.17) in der folgenden Form schreiben:

$$G_t(\varphi) = c \cdot \varrho(t) \cdot \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\varphi) \quad (t \in \mathbf{T},\, \varphi \in M). \tag{2.21}$$

Wegen $h \in L_2(\lambda)$ ist die kohärente Funktion $\Psi_h \in \mathcal{M}$ und damit $G_t \in \mathcal{M}$ für $t \in \mathbf{T}$. Weiter ist wegen m stetig auf $\mathbf{T}$ die Abbildung $\varrho \in L_2(\lambda)$ und damit $G \in L_2(\lambda \times F)$. Damit können wir nun den Isomorphismus $\mathcal{U}$ auf G_t anwenden. Dieser wirkt nur auf die kohärente Funktion und wir erhalten wegen (1.21):

$$X_t = \mathcal{U}(G_t) = c \cdot \varrho(t) \cdot \exp\Big(\int_0^t dW_s\, h(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ds\, |h(s)|^2\Big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.22}$$

Wir haben mit X_t eine Lösung der Gleichung

$$X_t = c + \delta\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) + \Lambda_W\big((m\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) \quad (t \in \mathbf{T}) \tag{2.23}$$

bzw. (nach (1.27) und (2.2))

$$X_t = c + \int_0^t dW_s\, h(s) \cdot X_s + \int_0^t ds\, m(s) \cdot X_s \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.24}$$

Bei (2.24) handelt es sich um eine adaptierte Gleichung. Die Lösung ist ein Produkt aus Anfangsbedingung und einem Exponentialterm.
In [2] wird die Anfangsbedingung $\eta \equiv c$ dahingehend verallgemeinert, daß η auch eine vom Prozeß (W_t) abhängige Zufallsgrösse sein kann. Damit würde die Gleichung (2.24) die Adaptiertheitsforderung verletzen. Die Struktur der Lösung einer solchen Gleichung unterscheidet sich dann von (2.22) dahingehend, daß die Anfangsbedingung sich nicht mehr aus der Lösung „kürzen“ läßt.

Setzen wir in (2.24) $m(s) \equiv \mu \in \mathbb{R}$ und $h(s) \equiv \sigma \in \mathbb{R}$, so erhalten wir für (2.22)

$$X_t = c \cdot \exp\big(\sigma \cdot W_t + (m - \frac{1}{2}\sigma^2)t\big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.25}$$

Nach [1] entspricht dies dem Prozeß der geometrischen Brownschen Bewegung, welchen wir bereits erwähnt haben.
Bertrachten wir andererseits den Spezialfall $m \equiv 0$ und $h \in L_2(\lambda)$ beliebig, so erhält man eine Lösung der Gleichung

$$X_t = c + \int_0^t dW_s\, h(s) \cdot X_s \quad (t \in \mathbf{T}) \tag{2.26}$$

in Gestalt von

$$X_t = c \cdot \exp\Bigg(\int_0^t dW_s\, h(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ds\, |h(s)|^2\Bigg) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.27}$$

Beispiel 2

Es seien $m \equiv 0$, $h \in L_2(\lambda)$ beliebig und $\Phi = \mathcal{S}(f \otimes \chi_{M_0})$, d. h., $\Phi(\varphi) = \int \varphi(dx) f(x)$, $f \in L_2(\lambda)$. Offensichtlich sind damit die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt. Wegen $m \equiv 0$ ist $K_t(\psi, \varphi) = \Psi_{\chi_{[0,t)}}(\psi)$ für alle $t \in \mathbf{T}$ und $\psi, \varphi \in M$. Damit läßt sich (2.17) in der folgenden Form schreiben:

$$G_t(\varphi) = \sum_{\delta_s \leq \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\varphi - \delta_s) \cdot f(s) = \mathcal{S}(f \otimes \Psi_{h\chi_{[0,t)}})(\varphi) \quad (t \in \mathbf{T},\ \varphi \in M). \tag{2.28}$$

Wegen $h \in L_2(\lambda)$ ist $\Psi_{h\chi_{[0,t)}} \in \mathcal{M}$ und wegen $f \in L_2(\lambda)$ und Lemma 1.12 ist damit $G_t \in \mathcal{M}$ für alle $t \in \mathbf{T}$ und $G \in L_2(\lambda \times F)$. Wir können also den Isomorphismus auf G_t anwenden und erhalten damit

$$X_t = \mathcal{U}(G_t) = \delta\big(f \otimes \mathcal{U}\Psi_{h\chi_{[0,t)}}\big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.29}$$

Mit Lemma 1.17 erhalten wir dann

$$X_t = \mathcal{U}\Psi_{h\chi_{[0,t)}} \cdot \delta(f \otimes \mathbf{1}) - \langle \mathrm{D}\mathcal{U}\Psi_{h\chi_{[0,t)}}, f\rangle_{L_2(\lambda)}$$

Wegen (1.25) und (1.12) ist

$$\mathrm{D}\mathcal{U}\Psi_{h\chi_{[0,t)}} = h\chi_{[0,t)} \otimes \mathcal{U}\Psi_{h\chi_{[0,t)}}.$$

Insgesamt haben wir dann mit (1.21):

$$X_t = \Bigg(\int dW_s\, f(s) - \int_0^t ds\, f(s) \cdot h(s)\Bigg) \cdot \exp\Bigg(\int_0^t dW_s\, h(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ds\, |h(s)|^2\Bigg) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.30}$$

Wir haben mit $X_t = X(t,.)$ eine Lösung der Gleichung

$$X_t = \delta(f \otimes \mathbf{1}) + \delta\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) \quad (t \in \mathbf{T}) \tag{2.31}$$

bzw.

$$X_t = \int dW_s\, f(s) + \int_0^t dW_s\, h(s) X_s \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.32}$$

Der interessierte Leser sei auf [5] verwiesen, wo das Beispiel ausführlich behandelt wird.

Beispiel 3

Es seien $m \equiv 0$, $h \in L_2(\lambda)$ und $\Phi = \Psi_f$, $f \in L_2(\lambda)$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt und wir erhalten wieder $K_t(\psi, \varphi) = \Psi_{\chi_{[0,t)}}(\psi)$ für alle $t \in \mathbf{T}$ und $\psi, \varphi \in M$. Damit läßt sich (2.17) in der folgenden Form schreiben:

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \le \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Psi_f(\varphi - \widehat{\varphi}) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.33}$$

Nach (2.18) und wegen (1.20) können wir für (2.33) auch schreiben:

$$G_t = \mathcal{S}^c(\Psi_{h\chi_{[0,t)}} \otimes \Psi_f) = \Psi_{h\chi_{[0,t)}+f} \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.34}$$

Wegen $h, f \in L_2(\lambda)$ ist die kohärente Funktion $\Psi_{h\chi_{[0,t)}+f} \in \mathcal{M}$ und damit also $G_t \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbf{T}$ und wir können den Isomorphismus $\mathcal{U}$ auf (2.34) anwenden. Wegen (1.21) erhalten wir

$$X_t = \mathcal{U}(G_t) = \exp\Bigg(\int_0^t dW_s\, h(s) + \int dW_s\, f(s) - \frac{1}{2} \cdot \|h\chi_{[0,t)} + f\|^2\Bigg) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.35}$$

Wir haben mit $X_t = X(t,.)$ eine Lösung der Gleichung

$$X_t = \exp\Big(\int dW_s\, f(s) - \frac{1}{2}\|f\|^2\Big) + \int_0^t dW_s\, h(s) \quad (t \in \mathbf{T}) \tag{2.36}$$

bzw. (nach (1.27))

$$X_t = \mathcal{U}\Psi_f + \delta\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.37}$$

Beispiel 4

Zuletzt seien noch $h \in L_2(\lambda)$ beliebig, $\Phi = \Psi_f$, $f \in L_2(\lambda)$ und $m(t,\varphi) = \overline{m}(t) \cdot \mathcal{N}(\varphi)$, $t \in \mathbf{T}$, $\varphi \in M$, wobei $\overline{m}$ stetig in $\mathbf{T}$ sei. Offensichtlich sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt. Wir erhalten für $0 < t_1 < t_2$, $\varphi \in M$ und wegen (1.15):

$$k_{t_1,t_2}(\varphi) = \exp\big(|\varphi| \cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} ds\, \overline{m}(s)\big).$$

Damit erhalten wir für $t \in \mathbf{T}$, $0 < x_1 < \cdots < x_n < t$ und $\varphi \in M$

$$\begin{aligned} K_t(\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}, \varphi) &= k_{0,x_1}(\varphi) \cdot \Big(\prod_{j=1}^{n-1} k_{x_j,x_{j+1}}\big(\varphi + \sum_{r=1}^{j} \delta_{x_j}\big)\Big) \cdot k_{x_n,t}\big(\varphi + \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}\big) \\ &= \exp\Big(|\varphi| \int\limits_0^{x_1} ds\, \overline{m}(s) + (|\varphi|+1) \int\limits_{x_1}^{x_2} ds\, \overline{m}(s) + \cdots + (|\varphi|+n) \int\limits_{x_n}^{t} ds\, \overline{m}(s)\Big) \\ &= \exp\Big(|\varphi| \cdot \int\limits_0^{t} ds\, \overline{m}(s) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{x_j}^{t} ds\, \overline{m}(s)\Big) \\ &= \exp\Big(|\varphi| \cdot \int\limits_0^{t} ds\, m(s)\Big) \cdot \prod_{j=1}^{n} \exp\Big(\int\limits_{x_j}^{t} ds\, \overline{m}(s)\Big). \end{aligned}$$

Für $y < t$ setzen wir $\varrho_t(y) := \exp\big(\int_y^t ds\, \overline{m}(s)\big)$ und damit nimmt (2.17) folgende Form an:

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \le \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Psi_f(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot \Psi_{\varrho_t(0)}(\widehat{\varphi}) \cdot \Psi_{\varrho_t}(\varphi - \widehat{\varphi}) \quad (t \in \mathbf{T},\ \varphi \in M). \tag{2.38}$$

Wegen (2.18), (1.20) und (1.8) können wir für (2.38) auch schreiben:

$$G_t = \mathcal{S}^c(\Psi_{\varrho_t(0) \cdot h\chi_{[0,t)}} \otimes \Psi_{f \cdot \varrho_t}) = \Psi_{\varrho_t(0) \cdot h\chi_{[0,t)} + f \cdot \varrho_t} \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.39}$$

Wegen $\overline{m}$ stetig auf $\mathbf{T}$ ist $\varrho_t \in L_2(\lambda)$ für $t \in \mathbf{T}$. Damit ist wegen $h, f \in L_2(\lambda)$ und aufgrund der Eigenschaften der kohärenten Funktionen $G_t \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbf{T}$ und $G \in L_2(\lambda \times F)$. Wir können also den Isomorphismus $\mathcal{U}$ auf (2.39) anwenden.
Die im Fockraum gelöste Gleichung hat die folgende Form:

$$G_t(\varphi) = \Psi_f + \int\limits_0^t \varphi(ds)\, h(s) \cdot G_s(\varphi - \delta_s) + |\varphi| \cdot \int\limits_0^t ds\, \overline{m}(s) \cdot G_s(\varphi) \quad (t \in \mathbf{T},\ \varphi \in M). \tag{2.40}$$

Wegen (1.13) und (2.1) können wir für (2.40) auch schreiben:

$$G_t = \Psi_f + \mathcal{S}\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{M}})G\big) + \Lambda_F\big((\overline{m}\chi_{[0,t)} \otimes \mathcal{N})G\big) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2.41}$$

Wenden wir auf diese Gleichung den Isomorphismus $\mathcal{U}$ an, so erhalten wir:

$$X_t = \mathcal{U}\Psi_f + \delta\big((h\chi_{[0,t)} \otimes \mathbf{1}_{L_2(P_W)})X\big) + \Lambda_W\big((\overline{m}\chi_{[0,t)} \otimes \gamma)X\big) \quad (t \in \mathbf{T}), \tag{2.42}$$

wobei $X_t = \mathcal{U}(G_t)$ bzw. $X = (\mathbb{1}_{L_2(\lambda)} \otimes \mathcal{U})G$ und γ der durch (1.26) eingeführte Malliavin-Operator ist. Der Übertrag von (2.39) mittels des Isomorphismus $\mathcal{U}$ liefert für $t \in \mathbf{T}$:

$$X_t = \mathcal{U}(G_t) = \exp\left(\varrho_t(0)\cdot\int_0^t dW_s\, h(s) + \int dW_s\, f(s)\cdot\varrho_t(s) - \frac{1}{2}\|\varrho_t(0)\cdot h\chi_{[0,t)} + f\cdot\varrho_t\|^2\right) \tag{2.43}$$

als Lösung der Gleichung (2.42)

Bemerkung. Im ersten Beispiel haben wir einen adaptierten Prozeß, dabei wird sichtbar, daß die Lösung im Wienerraum vom Typ Anfangsbedingung multipliziert mit einem Exponentialterm ist, also der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung entspricht.
Betrachtet man allerdings die letzten drei Beispiele, so handelt es sich hier um nichtadaptierte Prozesse und die Anfangsbedingung ist fest in die Lösung verzahnt, sie kommt also nicht als Multiplikator vor.

3 Beweis

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Beweis von Satz 2.2.

Sieht man sich die Definition der Funktion K_t, $t \in \mathbf{T}$ genauer an, so kann man sich klarmachen, daß sich (2.17) auch in der folgenden Form schreiben läßt:

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \leq \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) \quad (t \in \mathbf{T},\, \varphi \in M) \tag{3.1}$$

Wir betrachten zunächst für fixiertes $\varphi \in M$, sowie $0 \leq x < T$ und $c \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} f(t) = m(t, \varphi) \quad \text{mit der Anfangsbedingung } f(x) = c. \tag{3.2}$$

Aufgrund der Stetigkeitsforderungen an die Funktion $m(t, \varphi)$, $t \in \mathbf{T}$, $\varphi \in M$ erhalten wir mittels bekannter Resultate (siehe z. B. Abschnitt 10.2.1 aus [10]) über Lösungen linearer homogener gewöhnlicher Differentialgleichungen, daß die folgenden Hilfssätze gelten:

Lemma 3.1. *Seien $\varphi = \mathfrak{o}$ und $x = 0$. Dann besitzt die Differentialgleichung (3.2) mit der Anfangsbedingung $f(0) = c$ genau eine Lösung, und diese hat die Form*

$$f(t) = c \cdot \exp\left(\int_0^t ds\, m(s, \mathfrak{o})\right) = c \cdot k_{0,t}(\mathfrak{o}) \quad (0 \leq t \leq T). \tag{3.3}$$

Sei nun $\varphi \neq \mathfrak{o}$. Dann existiert nach Lemma 2.1 eine Folge $(x_j)_{j=1}^{|\varphi|}$ mit den Eigenschaften (2.11) und (2.12).

Lemma 3.2. *Sei $j = 0, 1, \ldots, |\varphi| - 1$. Für $x_j \leq t < x_{j+1}$ besitzt die Differentialgleichung (3.2) mit der Anfangsbedingung $f(x_j) = c$ genau eine Lösung, und diese hat die Gestalt*

$$f(t) = c \cdot \exp\left(\int_{x_j}^t ds\, m(s, \varphi)\right) = c \cdot k_{x_j,t}(\varphi) \quad (x_j \leq t < x_{j+1}). \tag{3.4}$$

Lemma 3.3. *Für $x_{|\varphi|} \leq t \leq x_{|\varphi|+1} = T$ besitzt die Differentialgleichung (3.2) mit der Anfangsbedingung $f(x_{|\varphi|}) = c$ genau eine Lösung, und diese hat die Gestalt*

$$f(t) = c \cdot \left(\int_{x_{|\varphi|}}^t ds\, m(s, \varphi)\right) = c \cdot k_{x_{|\varphi|},t}(\varphi) \quad (x_{|\varphi|} \leq t \leq T). \tag{3.5}$$

Der Beweis von Satz 2.2 erfolgt nun durch vollständige Induktion in der Teilchenzahl $|\varphi|(= \varphi(\mathbf{T}))$.

Wir betrachten zunächst $\varphi = \mathfrak{o}$, also $|\varphi| = 0$. Dann nimmt die Gleichung (2.10) die folgende Form an:

$$G_t(\mathfrak{o}) = \Phi(\mathfrak{o}) + \int_0^t ds\, m(s, \mathfrak{o}) \cdot G_s(\mathfrak{o}) \quad (t \in \mathbf{T}).$$

D. h., wir haben die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} G_t(\mathfrak{o}) = m(t, \mathfrak{o}) \cdot G_t(\mathfrak{o})$$

mit der Anfangsbedingung $G_0(\mathfrak{o}) = \Phi(\mathfrak{o})$. Nach Lemma 3.1 erhalten wir deshalb, daß im Falle $\varphi = \mathfrak{o}$ genau eine Lösung existiert, und diese hat die Form

$$G_t(\mathfrak{o}) = \Phi(\mathfrak{o}) \cdot k_{0,t}(\mathfrak{o}) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{3.6}$$

Da $\widehat{\varphi} \le \mathfrak{o}$ nur für $\widehat{\varphi} = \mathfrak{o}$ gilt und wegen $K_t(\mathfrak{o}, \varphi) = k_{0,t}(\varphi)$ für $\varphi \in M$ kann man (3.6) auch in der Form

$$G_t(\mathfrak{o}) = \sum_{\widehat{\varphi} \le \mathfrak{o}} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\mathfrak{o} - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \mathfrak{o} - \widehat{\varphi}) \quad (t \in \mathbf{T}),$$

also entsprechend (3.1) schreiben.

Im folgenden machen wir die Induktionsannahme

Für alle $\varphi \in \bigcup_{r=1}^n M_r$ besitzt die Gleichung (2.10) genau eine Lösung, und diese hat die Gestalt (3.1) mit der Anfangsbedingung $G_0(\varphi) = \Phi(\varphi)$. (3.7)

Sei nun $\varphi \in M_{n+1}$. Dann hat φ gemäß Lemma 2.1 die Darstellung:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_{x_j} \left(= \sum_{j=1}^{n+1} \delta_{x_j(\varphi)} \right) \quad \text{mit } 0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} < T.$$

Wir wollen nun zeigen, daß für ein solches $\varphi \in M_{n+1}$ die Gleichung (2.10) eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, und diese die Form

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \le \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) \quad (t \in \mathbf{T})$$

hat.

Zum Beweis dieser Behauptung führen wir eine Induktion nach $t \in \mathbf{T}$ durch.

Sei zunächst $0 \leq t < x_1$. Dann nimmt die Gleichung (2.10) die folgende Gestalt an:

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) + \int_0^t ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) \quad (0 \leq t < x_1). \tag{3.8}$$

D. h., wir haben die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} G_t(\varphi) = m(t,\varphi) G_t(\varphi)$$

mit der Anfangsbedingung $G_0(\varphi) = \Phi(\varphi)$. Nach Lemma 3.2 erhalten wir, daß genau eine Lösung existiert und diese die folgende Form hat

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,t}(\varphi) \quad (0 \leq t < x_1). \tag{3.9}$$

Wegen $t < x_1$ ist $\Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) = \Psi_h(\widehat{\varphi}) \cdot \Psi_{\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) = 0$ für alle $\widehat{\varphi} \leq \varphi$ mit $\widehat{\varphi} \neq \mathfrak{o}$. Deshalb können wir (3.9) auch in der folgenden Form schreiben:

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \leq \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) \quad (0 \leq t < x_1).$$

Das entspricht aber der Form (3.1).
Weiter erhalten wir unter Verwendung von (3.8) und(3.9):

$$\int_0^{x_1} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot \Big(k_{0,x_1}(\varphi) - 1 \Big). \tag{3.10}$$

Wir nehmen nun weiter an, daß für $r = 1, 2, \ldots, n$ die Gleichung (2.10) für $0 \leq t < x_r$ genau eine Lösung mit der Anfangsbedingung $G_0(\varphi) = \Phi(\varphi)$ besitzt, diese die Form (3.1) hat und außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_r} ds\, m(s,\varphi) G_s(\varphi) = \Phi(\varphi) &\Big(k_{0,x_r}(\varphi) - 1 \Big) \\ &+ \sum_{j=1}^{r-1} h(x_j) G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \Big(k_{x_j,x_r}(\varphi) - 1 \Big). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sei nun $x_r \leq t < x_{r+1}$. Dann nimmt die Gleichung (3.1) die Form

$$\begin{aligned} G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) &+ \sum_{j=1}^{r} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \\ &+ \int_0^{x_r} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) + \int_{x_r}^{t} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) \quad (x_r \leq t < x_{r+1}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Wegen (3.11) können wir für (3.12) schreiben

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,x_r}(\varphi) + \sum_{j=1}^{r} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot k_{x_j,x_r}(\varphi) + \int_{x_r}^{t} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) \quad (x_r \leq t < x_{r+1}). \tag{3.13}$$

D. h., wir haben die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} G_t(\varphi) = m(t,\varphi) \cdot G_t(\varphi) \quad (x_r \leq t < x_{r+1})$$

mit der Anfangsbedingung

$$G(x_r,\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,x_r}(\varphi) + \sum_{j=1}^{r} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot k_{x_j,x_r}(\varphi).$$

Nach Lemma 3.2 existiert genau eine Lösung, und diese hat die Gestalt:

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{j=1}^{r} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot k_{x_j,t}(\varphi). \tag{3.14}$$

Weiter erhalten wir unter Verwendung von (3.11), (3.13) und (3.14):

$$\int_{0}^{x_{r+1}} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot \big(k_{0,x_r}(\varphi) - 1\big) + \sum_{j=1}^{r} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot \big(k_{x_j,x_r}(\varphi) - 1\big).$$

Wegen (3.7) kann man für $\varphi \in M_{n+1}$ und $\delta_s \leq \varphi$ die Abbildung $G_s(\varphi - \delta_s)$ in der Form (3.1) schreiben, da $\varphi - \delta_s \in M_n$ liegt. Wir erhalten also für (3.14) und $t < x_{r+1}$

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{\widehat{\varphi} \leq \varphi - \delta_{x_j}} h(x_j) \cdot \Psi_{h\chi_{[0,x_j)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \delta_{x_j} - \widehat{\varphi}) \cdot K_{x_j}(\widehat{\varphi}, \varphi - \delta_{x_j} - \widehat{\varphi}) \cdot k_{x_j,t}(\varphi). \tag{3.15}$$

Wir definieren die Abbildung $\zeta : \widetilde{M} \to \mathbf{T}$. Dabei ist $\zeta(\varphi) = x$ für $\varphi \in \widetilde{M}$ und $x \in \mathbf{T}$ genau dann, wenn $\delta_x \leq \varphi$ und $\varphi((x,T]) = 0$. Mit anderen Worten bestimmt ζ den „größten Punkt“ eines Zählmaßes $\varphi \in \widetilde{M}$. Wir setzen außerdem $\zeta(\mathfrak{o}) := 0$.

Offensichtlich ist $\zeta^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{M}$ und $\zeta^{-1}(\{x\}) \cap \zeta^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ für $x \neq y$, und wir erhalten für alle $g \in \mathcal{M}$ und alle $\varphi \in M$:

$$\int \varphi(dx)\Bigg(\sum_{\substack{\widehat{\varphi}\in\zeta^{-1}(\{x\})\\ \widehat{\varphi}\leq\varphi}} g(\widehat{\varphi})\Bigg) = \sum_{\substack{\widehat{\varphi}\leq\varphi\\ \widehat{\varphi}\neq\mathfrak{o}}} g(\widehat{\varphi}). \tag{3.16}$$

Wir können wegen (1.5) für $h(x_j)\cdot\Psi_{h\chi_{[0,x_j)}}(\widehat{\varphi})$ in (3.15) schreiben:

$$h(x_j)\cdot\Psi_{h\chi_{[0,x_j)}}(\widehat{\varphi}) = h(x_j)\cdot\prod_{\delta_{x_l}\leq\widehat{\varphi}} h(x_l)\cdot\chi_{[0,x_j)}(x_l) = \Psi_{h\chi_{[0,x_j]}}(\widehat{\varphi}+\delta_{x_j}).$$

Demnach erhalten wir in (3.15) nur für die $\widehat{\varphi}\leq\varphi$ mit $\zeta(\widehat{\varphi})\leq x_j$ einen Summanden ungleich Null, und wir können für (3.15) schreiben:

$$\begin{aligned} G_t(\varphi) = \Phi(\varphi)\cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{j=1}^{r} k_{x_j,t}(\varphi) \\ \cdot\Bigg(\sum_{\substack{\zeta(\widehat{\varphi})<x_j\\ \widehat{\varphi}\leq\varphi}} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}+\delta_{x_j})\cdot\Phi(\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi})\cdot K_{x_j}(\widehat{\varphi},\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi})\Bigg). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wegen (2.16) und $\zeta(\widehat{\varphi})<x_j$ ist

$$\begin{aligned} K_{x_j}(\widehat{\varphi},\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi})\cdot k_{x_j,t}(\varphi) &= k_{0,x_1(\widehat{\varphi})}(\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi}) \\ &\cdot\Bigg(\prod_{l=1}^{\zeta(\widehat{\varphi})-1} k_{x_l(\widehat{\varphi}),x_{l+1}(\widehat{\varphi})}\big(\varphi-\delta_{x_j(\widehat{\varphi})}-\widehat{\varphi}+\sum_{\alpha=1}^{l}\delta_{x_\alpha(\widehat{\varphi})}\big)\Bigg) \\ &\cdot k_{x_{\zeta(\widehat{\varphi})},x_j}(\varphi-\delta_{x_j})\cdot k_{x_j,t}(\varphi) \\ &= K_t(\widehat{\varphi}+\delta_{x_j},\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi}). \end{aligned}$$

Damit nimmt (3.17) folgende Form an:

$$\begin{aligned} G_t(\varphi) =& \Phi(\varphi)\cdot k_{0,t}(\varphi) \\ &+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{\zeta(\widehat{\varphi})<x_j} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}+\delta_{x_j})\cdot\Phi(\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi})\cdot K_t(\widehat{\varphi}+\delta_{x_j},\varphi-\delta_{x_j}-\widehat{\varphi}) \\ G_t(\varphi) =& \Phi(\varphi)\cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{\widehat{\varphi}\in\zeta^{-1}(\{x_j\})\\ \widehat{\varphi}\leq\varphi}} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi})\cdot\Phi(\varphi-\widehat{\varphi})\cdot K_t(\widehat{\varphi},\varphi-\widehat{\varphi}). \end{aligned}$$

Mit (3.16) erhalten wir dann

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi)\cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{\substack{\widehat{\varphi}\leq\varphi\\ \widehat{\varphi}\neq\mathfrak{o}}} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi})\cdot\Phi(\varphi-\widehat{\varphi})\cdot K_t(\widehat{\varphi},\varphi-\widehat{\varphi}) \quad (t<x_{r+1}). \tag{3.18}$$

Wir haben damit gezeigt, das folgendes gilt

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \leq \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}) \tag{3.19}$$

für $t < x_{r+1}$ und

$$\int_0^{x_{n+1}} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot \big(k_{0,x_{n+1}}(\varphi) - 1\big) + \sum_{j=1}^{n} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot \big(k_{x_j,x_{n+1}} - 1\big). \tag{3.20}$$

Wir betrachten nun noch den Fall $x_{n+1} \leq t \leq T$. Dann nimmt die Gleichung (3.1) die folgende Form an:

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+1} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) + \int_0^{x_{n+1}} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi) + \int_{x_{n+1}}^{t} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi).$$

Wegen (3.20) können wir schreiben

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+1} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot k_{x_j,t}(\varphi) + \int_{x_{n+1}}^{t} ds\, m(s,\varphi) \cdot G_s(\varphi). \tag{3.21}$$

D. h., wir haben die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} G_t(\varphi) = m(t,\varphi) \cdot G_t(\varphi)$$

mit der Anfangsbedingung

$$G_{x_{n+1}}(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,x_{n+1}}(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+1} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot k_{x_j,x_{n+1}}(\varphi)$$

Nach Lemma 3.3 existiert genau eine Lösung, und diese hat die Gestalt

$$G_t(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot k_{0,t}(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+1} h(x_j) \cdot G_{x_j}(\varphi - \delta_{x_j}) \cdot k_{x_j,t}(\varphi) \quad (x_{n+1} \leq t \leq T). \tag{3.22}$$

Analog zu den Schritten (3.15) bis (3.18) erhalten wir für (3.22)

$$G_t(\varphi) = \sum_{\widehat{\varphi} \leq \varphi} \Psi_{h\chi_{[0,t)}}(\widehat{\varphi}) \cdot \Phi(\varphi - \widehat{\varphi}) \cdot K_t(\widehat{\varphi}, \varphi - \widehat{\varphi}).$$

Damit ist Satz 2.2 bewiesen. □

Literatur

[1] A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, Birkhäuser-Verlag Basel, 1996

[2] R. Buckdahn, *A linear Stochastic Differential Equation with Skorochod Integral*, Aus: Markov Processes and Control Theory, ed. by H. Langer und V. Nollau, Akademie-Verlag Berlin, 1989, Math. Research, S. 9-15

[3] K.-H. Fichtner, W. Freudenberg, V. Liebscher, *Time Evolution and Invariance of Boson Systems given by Beam Splittings*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics Vol.1 No.4 (1998), S. 511-531

[4] K.-H. Fichtner, G. Winkler, *Generalized Brownian Motion, Point Processes and Stochastic Calculus for Random Fields*, Math. Nachrichten 161 (1993), S. 291-307

[5] K.-H. Fichtner, T. Wittke, *On a Stochastic Differential Equation with Skorochod Integral and Point Processes*, Contributions in Probability 8, S. 119-129

[6] H. Föllner, *Der Zufall in den Wirtschaftswissenschaften: Zur Rolle der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Theorie der Finanzmärkte*, Nova Acta Leopoldina NF 79, Nr. 308 (1999), S.113-125

[7] J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke, *Unbegrenzt teilbare Punktprozesse*, Akademie-Verlag Berlin, 1974

[8] D. Nualart, E. Pardoux, *Stochastic Calculus with anticipating integrands*, Probability Theory and Related Fields 78 (1988), S. 535-581

[9] D. Nualart, M. Zakai, *Generalized Stochastic Integrals and the Malliavin Calculus*, Probability Theory and Related Fields 73 (1986), S. 255-280

[10] H. Triebel, *Analysis und mathematische Physik*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1981

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, den 27.10.2000