Theoretische Informatik UE SS2016
Übungsblatt 9

Aufgabe 1:
Betrachten Sie die prädikatenlogischen Formeln über die Variablen x,y,z, eine einstellige Funktion f, eine zweistellige Funktion g, eine Konstante k, ein einstelliges Prädikat P und ein zweistelliges Prädikat Q.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln sind und begründen Sie Ihre Hypothese.

(i) $(\neg P(y) \to \forall x \exists y\ Q(x, g(z, y)))$

(ii) $\forall x \forall y\ Q(x, y) \wedge \exists z\ P(\neg z)$

(iii) $\forall z\ P(z) \to \exists x\ (Q(x, k(y)) \wedge \forall y\ P(f(y))$

(iv) $\forall x\ (g(x, g(y, z)) \vee \exists z\ \neg Q(z, x))$

(b) Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache aller prädikatenlogischen Terme repräsentiert (entsprechend der Definition auf den Vorlesungsfolien).

(c) Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache aller prädikatenlogischen Formeln repräsentiert (entsprechend der Definition auf den Vorlesungsfolien).

Aufgabe 2:
Gegeben seien folgende Formeln.

(a) $\forall x\ \big(P(f(x), k) \to \neg Q(x)\big)$ (b) $\exists x\ \neg\big(Q(x) \to P(f(x), k)\big)$

Überprüfen Sie welche der folgenden Strukturen die Formeln erfüllen, d.h. welche Struktur Modell welcher Formel ist.

(i) $\alpha_1 = (\{Max, Nicole, Lisa\}, \varphi_1, \psi_1, \xi_1)$ mit

- $k^{\varphi_1} = Max$
- $f^{\varphi_1}(Max) = Lisa$, $f^{\varphi_1}(Nicole) = Max$, $f^{\varphi_1}(Lisa) = Lisa$
- $Q^{\psi_1} = \{Max, Nicole\}$, $P^{\psi_1} = \{(Lisa, Max)\}$
- $x^{\xi_1} = Max$, $y^{\xi_1} = Max$

(ii) $\alpha_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \varphi_2, \psi_2, \xi_2)$ mit

- $k^{\varphi_2} = 4$
- $f^{\varphi_2}(1) = 4$, $f^{\varphi_2}(2) = 4$, $f^{\varphi_2}(3) = 2$, $f^{\varphi_2}(4) = 2$
- $Q^{\psi_2} = \{1, 2\}$, $P^{\psi_2} = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2\}, y \in \{3, 4\}\}$
- $x^{\xi_2} = 1$, $y^{\xi_2} = 1$

Aufgabe 3:

Gegeben seien folgende Formeln.

1. $\forall x \exists y \; \big(\neg P(x,y) \rightarrow \neg P(x, g(x,y))\big)$
2. $\exists y \forall x \; \big(\neg P(x,y) \rightarrow \neg P(x, g(x,y))\big)$

Überprüfen Sie welche der folgenden Strukturen die Formeln erfüllen, d.h. welche Struktur Modell welcher Formel ist.

(i) $\alpha_1 = (\{1,2\}, \varphi_1, \psi_1, \xi_1)$ mit

- $g^{\varphi_1}(1,2) = g^{\varphi_1}(2,2) = 1$, $g^{\varphi_1}(1,1) = g^{\varphi_1}(2,1) = 2$
- $P^{\psi_1}(x,y) = \{(1,1),(2,2)\}$
- $x^{\xi_1} = 1$, $y^{\xi_1} = 1$

(ii) $\alpha_2 = (\{c,d\}, \varphi_2, \psi_2, \xi_2)$ mit

- g^{φ_2} :

x	y	$g^{\varphi_2}(x,y)$
c	c	d
c	d	d
d	c	c
d	d	d

- $P^{\psi_2} = \{(c,d),(d,c)\}$
- $x^{\xi_2} = c$, $y^{\xi_2} = c$

Aufgabe 4:

Gegeben seien folgende Prädikate, Funktionen und Konstanten:

$Alter(x,y)$	... x ist älter als y	$Gleich(x,y)$	... x ist gleich y
$vater(x)$	... Vater von x	$mutter(x)$	... Mutter von x
$Geschwister(x,y)$	... x und y sind Geschwister	$Kinder(x)$	... x hat Kinder

(a) Schreiben Sie folgende deutsche Sätze als prädikatenlogische Formeln unter Verwendung der obigen Prädikate:

  (i) Jede Mutter hat Kinder

  (ii) Zwei Personen sind genau dann Geschwister wenn sie die gleiche Mutter und den gleichen Vater haben.

  (iii) Die Geschwister jeder Person sind jünger als ihr Vater.

  (iv) Es exisitiert eine Person die keine Kinder hat und jünger als alle anderen Personen ist.

(b) Übersetzen Sie die folgenden Formeln in deutsche Sätze.

  (i) $\forall x \forall y (\neg Gleich(x,y) \wedge Gleich(vater(x), vater(y))) \rightarrow Gleich(mutter(x), mutter(y))$

  (ii) $\forall x \forall y \forall z (Alter(y,x) \wedge Alter(x,z) \rightarrow Alter(y,z))$

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass alle Objekte Personen sind. Sie müssen das in Ihren Formeln also nicht gesondert überprüfen.

Aufgabe 5:

Übersetzen Sie die folgenden deutschen Sätze in prädikatenlogische Formeln und geben Sie jeweils ein Modell an. Geben Sie auch die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Prädikate und Funktionen an.

1. Es existiert eine Menge die nicht leer ist.
2. Die Differenz zweier Mengen ist wieder eine Menge.
3. Für jede Menge gibt es eine Menge die nicht leer ist, sodass der Durchschnitt der beiden Mengen leer ist.
4. Die Vereinigung einer Menge mit einer leeren Menge ist die Menge selbst.

Aufgabe 6:

Formalisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in Prädikatenlogik und zeigen Sie die Konsistenz der Aussagen indem Sie ein gemeinsames Modell angeben. Geben Sie die Bedeutung der verwendeten Prädikate und Funktionen an.

1. Säugetiere legen keine Eier.
2. Nicht alle Säugetiere können fliegen.
3. Ein Säugetier kann genau dann fliegen wenn es ein Fledertier ist.
4. Wenn ein Tier Eier legt ist es weder ein Fledertier noch ein Säugetier.
5. Es existieren sowohl Säugetiere als auch Nicht-Säugetiere die Fliegen können.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass alle Objekte Tiere sind. Sie müssen das in Ihren Formeln also nicht gesondert überprüfen.