Formale Logik in der Informatik

Prädikatenlogik

050026 VO Theoretische Informatik

Wolfgang Dvořák

Theory and Applications of Algorithms Gruppe,
Fakultät für Informatik, Universität Wien

Sommersemester 2016

Roadmap

Letzte Einheit:

- Worum geht es in der Logik
- Aussagenlogik
- Formalisieren und Schließen in der Aussagenlogik
- Resolutionskalkül der Aussagenlogik
- Hornlogik und Einheitsresolution

Diese Einheit:

- Einführung Prädikatenlogik
- Formale Syntax der Prädikatenlogik
- Formale Semantik der Prädikatenlogik
- Formalisieren in Prädikatenlogik

Prädikatenlogik – Prädikate

Wir wollen Objekte von ihren Eigenschaften und Beziehungen zwischen einander trennen. Dazu verwenden wir **Prädikate**.

Beispiel

Um die Aussage „Hans ist ein Mensch“ zu formalisieren verwenden wir ein (einstelliges) Prädikat *Mensch*(.) und ein Objekt *hans* und bekommen

$$Mensch(hans)$$

Mit dem gleichen Prädikat können wir auch ausdrücken dass Barbara ein Mensch ist

$$Mensch(barbara)$$

Wir können auch ausdrücken das der Kater Findus kein Mensch ist

$$\neg Mensch(findus)$$

Ein Prädikat kann für manche Objekte wahr aber für andere falsch sein.

Prädikatenlogik – Quantoren

Prädikate erlauben es mittels Quantoren Aussagen über die Gesamtheit der Objekte die eine Eigenschaft erfüllen zu Treffen.

Wir betrachten zwei **Quantoren**

- **Allquantor** $\forall$: etwas gilt für alle Objekte
- **Existenzquantor** $\exists$: etwas gilt für mindestens ein Objekt

Beispiel

Die Aussage „Jeder Mensch ist wertvoll“ können wir jetzt wie folgt formalisieren:

$$\forall x \ (Mensch(x) \rightarrow Wertvoll(x))$$

Gemeinsam mit $Mensch(hans)$ schließen wir

$$Wertvoll(hans)$$

Prädikatenlogik – 2-stellige Prädikate

Mit Mehrstelligen Prädikaten können wir Beziehungen zwischen Objekten modellieren.

Beispiel

Aussage 1: Fritz fährt Ski
Aussage 2: Uli fährt Ski
Aussage 3: Uli fährt Snowboard

Wir könnten jetzt zwei Prädikate *FahrtSki*, und *FahrtSnowboard* einführen. Damit würden wir aber wieder etwas von der gemeinsamen Struktur der Aussagen verlieren.

Besser ist wir verwenden ein 2-stelliges Prädikat *Fahrt*

$$Fahrt(fritz, ski) \land Fahrt(uli, ski) \land Fahrt(uli, snowboard)$$

Jetzt können wir auch sagen das jeder Wintersportler mindestens ein Sportgerät fährt (das muss aber nicht Ski oder Snowboard sein)

$$\forall x\ (Wintersportler(x) \rightarrow \exists y\ Fahrt(x, y))$$

Prädikatenlogik – Funktionen

Mache Beziehungen sind von der Form dass einem Objekt ein anderes eindeutig zugeordnet wird, z.B. jeder hat nur eine (biologische) Mutter. In solchen Fällen verwendet man statt einem Prädikat besser eine Funktion.

Beispiel

Aussage: „Jo Anns Mutter liebt Musik“

Ohne Funktionen: $\exists x(Mutter(x, joAnn) \wedge Liebt(x, musik))$.

Das liest sich als: „Jo Ann hat mindestens eine Mutter die Musik liebt“

Mit Funktionen

Wir verwenden: Objekte *joAnn*, *musik*,
das 2-stellige Prädikat *Liebt*,
die 1-stellige Funktion *mutter*

$$Liebt(mutter(joAnn), musik)$$

Prädikatenlogik – Funktionen

Unterschied **Prädikat** – **Funktion** (in der Prädikatenlogik):

- Prädikate ordnen Objekten Wahrheitswerte zu.
- Funktionen ordnen Objekten wieder Objekte zu.

Prädikatenlogik – Funktionen

Beispiel

Aussage: Wenn a größer als b ist dann ist für alle x auch $a + x$ größer als $b + x$

$$Großer(a, b) \rightarrow \forall x\, Großer(plus(a, x), plus(b, x))$$

Beispiel

Die Multiplikation kann mittels der Addition wie folgt definiert werden:

- x mal 0 ist 0
- x mal $(y + 1)$ ist x mal y plus x

In der Prädikatenlogik erhalten wir:

$$\forall x \forall y \big(IstGleich(mal(x, 0), 0) \wedge IstGleich(mal(x, plus(y, 1)), plus(mal(x, y), x)) \big)$$

Das entspricht $\forall x \forall y \big(x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x \big)$.

Formale Definition der Prädikatenlogik

Nun kennen wir die zentralen Bauteile der Prädikatenlogik und können diese formal definieren.

2 Schritte:

- Zuerst definieren wir die **formale Syntax**, d.h., wie Prädikatenlogische Formeln aufgebaut sind.
- Dann geben wir diesen Formeln eine **formale Semantik**, d.h., wir geben den Formeln eine Bedeutung.

Formale Syntax der Prädikatenlogik

Nomenklatur

Die elementaren Bestandteile prädikatenlogischer Formeln:

- Eine **Variable** ist ein Symbol der Form $x, y, z, \ldots$
- Ein **Funktionssymbol** fängt mit einem Kleinbuchstaben an und hat eine gewisse Stelligkeit, z.B. mutter(.) ist eine 1-stellige Funktion
- Nullstellige Funktionen heißen auch **Konstanten**, z.B. joAnn
- Ein **Prädikatensymbol** fängt mit einem Großbuchstaben an und hat immer die gleiche Stelligkeit, z.B. Liebt(.,.) ist ein 2-stelliges Prädikat.

Ausnahmen von der obigen Nomenklatur-Regel sind die üblichen arithmetischen Operation $+, *, \ldots$ und Relationen $=, \leq, \geq, \ldots$

Formale Syntax der Prädikatenlogik – Terme

Definition

Ein **Term** wird nach den folgenden Regeln gebildet

- Jede Variable ist ein Term
- Ist f eine k-stellige Funktion, und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme dann ist $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term. Insbesondere sind alle Konstanten Terme.

Terme werden also aus Variablen und Funktionen (insbesondere Konstanten) gebildet und repräsentieren Objekte.

Beispiel

- x, y (Variablen)
- $joAnn$, $musik$ (Konstanten)
- $mutter(x)$, $mutter(mutter(joAnn))$ (Terme mit Funktionen)

Syntax der Prädikatenlogik – Atomare Formeln

Atomare Formeln repräsentieren simple Aussagen.

Definition

Wenn P ein k-stelliges Prädikatensymbol ist und $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine **atomare Formel**.

Atomare Formeln werden gebildet indem man Terme in Prädikate (entsprechend der Stelligkeit) „einsetzt“.

Beispiel

- $Liebt(x, y)$
- $Liebt(mutter(joAnn), musik)$
- $Prim(zwei)$
- $Staffel(bernhard, elfi, julia, y)$

Syntax der Prädikatenlogik – Formeln

Nun können wir prädikatenlogische Formeln definieren:

Definition

Eine **Formel** wird nach den folgenden Regeln gebildet

- Jede atomare Formel ist eine Formel
- Sind F und G Formeln dann sind auch
$$\neg F, \quad (F \wedge G), \quad \text{und} \quad (F \vee G)$$
  Formeln.
- Ist x eine Variable und F eine Formel dann sind auch
$$\forall x\, F \qquad \text{und} \qquad \exists x\, F$$
  Formeln.

Die Implikation $F \rightarrow G$ verwenden wir als Abkürzung für $\neg F \vee G$.

Syntax der Prädikatenlogik – Beispiel

Beispiel

Prädikate: $P(.), R(.,.), S(.,.,.,.)$
Funktionen: $f(.), g(.,.), h(.,.,.)$
Variablen: x, y, z

- **Terme:** $x,\ f(x),\ g(f(x),y),\ h(y,f(z),x),\ \ldots$
- **Atomare Formeln:** $P(x),\ R\big(g(f(x),y),x\big),\ S\big(z,x,g(x),y\big)\ \ldots$
- **Formeln:**
  $(P(x) \wedge \neg R(g(f(x),y),x))$,
  $\exists x\, P(x)$,
  $\exists z\big(\exists x\, P(x) \vee \forall x\, S(z,x,g(x),y)\big),\ \ldots$

Prädikatenlogik – Gebundene / Freie Variablen

Eine Variable die bei jedem Auftreten einem Quantor zugeordnet ist bezeichnen wir als **gebunden**. Anderenfalls nennen wir die Variable **frei**.

Definition

- In atomaren Formeln sind alle Variablen frei.
- In Formeln der Form $\forall x\, F$, $\exists x\, F$ ist x gebunden. Alle anderen Variablen sind gebunden wenn sie in F gebunden sind.
- In Formeln der Form $\neg F$ ist x gebunden wenn es in F gebunden ist.
- In Formeln der Form $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ ist x gebunden wenn es in F und G gebunden ist.

Eine Formel F ist eine **geschlossene Formel** wenn F keine freien Variablen hat.

Prädikatenlogik – Gebundene / Freie Variablen

Beispiele

- $\forall x \big(\mathit{Mensch}(x) \wedge \mathit{Spielt}(x, y) \big)$

  x gebundene Variable, y freie Variable

- $\forall x \big(\mathit{Mensch}(x) \wedge \exists y \, \mathit{Spielt}(x, y) \big)$

  x, y gebundene Variablen
  geschlossene Formel

- $\big(\forall x \; \mathit{Mensch}(x) \wedge \exists y \, \mathit{Spielt}(x, y) \big)$

  x freie Variable, y gebundene Variable

- $\big(\forall x \, \mathit{Mensch}(y) \wedge \exists y \, \mathit{Spielt}(x, y) \big)$

  x, y freie Variablen

Semantik der Prädikatenlogik - Strukturen

Idee: Die Semantik wird mit Hilfe sogenannter Strukturen definiert.

Eine Struktur besteht aus

- eine Grundmenge von Objekten,
- konkrete Funktionen und Prädikate über diese Objekte
- eine Zuordnung zwischen diesen Funktionen/Prädikate und den Funktionssymbolen/Prädikatensymbolen in der Formel
- Eine Funktion die jeder (freien) Variablen ein Objekt zuweist

Atomare Formeln können in einer Struktur durch einsetzen überprüft werden.

Zusammengesetzte Formeln werden mit einem rekursiven Schema ausgewertet (ähnlich wie in der Aussagenlogik).

Die Semantik einer Formel ergibt sich durch die Strukturen die Modell der Formel sind.

Semantik der Prädikatenlogik - Strukturen

Zuerst müssen wir Strukturen definieren:

Definition

Eine zu einer Formel F passende **Struktur** ist ein Tupel $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$

- U ist eine nicht leere Menge, das **Universum** oder die Grundmenge.
- φ eine Abbildung die jedem k-stelligen Funktionssymbol f in F eine Funktion $f^\varphi : U^k \to U$ zuordnet.
- ψ eine Abbildung die jedem k-stelligen Prädikatensymbol P in F ein Prädikat $P^\psi \subseteq U^k$ zuordnet.
- ξ eine Abbildung die jeder Variablen x ein Element $x^\xi \in U$ zuordnet.

ξ gibt freien Variablen eine Bedeutung und hat keinen Einfluss auf die Semantik von geschlossenen Formeln.

Semantik der Prädikatenlogik - Strukturen

Beispiel

Betrachten wir die Formel:

$$\exists x\, \mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(x), \mathit{musik})$$

Eine passende Struktur wäre:

- $U = \{\mathit{JoAnn}, \mathit{Mum}, \mathit{STS}\}$
- $\mathit{musik}^{\varphi} = \mathit{STS}$
  $\mathit{mutter}^{\varphi}: \mathit{mutter}^{\varphi}(\mathit{JoAnn}) = \mathit{Mum}, \quad \mathit{mutter}^{\varphi}(\mathit{Mum}) = \mathit{JoAnn}, \quad \mathit{mutter}^{\varphi}(\mathit{STS}) = \mathit{STS}$
- $\mathit{Liebt}^{\psi} = \{(\mathit{Mum}, \mathit{STS}), (\mathit{JoAnn}, \mathit{Mum})\}$
- $x^{\xi} = \mathit{Mum}$

Semantik der Prädikatenlogik - Terme

Wir definieren zunächst den Wert eines Terms in einer Struktur α

Definition

Der **Wert** $\alpha(t)$ eines Terms t in der Struktur α ist wie folgt gegeben:

- Ist t eine Variable dann $\alpha(t) = t^\xi$
- Ist t von der Form $f(t_1, \dots, t_k)$ dann $\alpha(t) = f^\varphi(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$

Beispiel

Gegeben α mit $joAnn^\varphi = Susi$, $mutter^\varphi(Susi) = Mum$

- $\alpha(joAnn) = joAnn^\varphi = Susi$
- $\alpha(mutter(joAnn)) = mutter^\varphi(\alpha(joAnn)) = mutter^\varphi(Susi) = Mum$

Beispiel

Gegeben α mit $mutter^\varphi(Mum) = JoAnn$, $x^\xi = Mum$

- $\alpha(x) = x^\xi = Mum$
- $\alpha(mutter(x)) = mutter^\varphi(\alpha(x)) = mutter^\varphi(Mum) = JoAnn$

Semantik der Prädikatenlogik - Atome

Definition

Der **Wahrheitswert** $\alpha(F)$ einer atomaren Formel $F = P(t_1, \ldots, t_k)$ in einer Struktur α ist gegeben durch

$$\alpha(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k)) \in P^\psi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Gegeben Struktur α mit

- $\alpha(joAnn) = Susi$, $\alpha(musik) = STS$
- $\alpha(mutter(Susi)) = Mum$, $\alpha(mutter(x)) = Susi$,
- $Liebt^\psi = \{(Mum, STS), (Susi, Mum)\}$

dann gilt

1. $\alpha(Liebt(mutter(joAnn), musik)) = Liebt^\psi(Mum, STS) = 1$
2. $\alpha(Liebt(mutter(x), musik)) = Liebt^\psi(Susi, STS) = 0$

Semantik der Prädikatenlogik

Konstanten, 0-stellige Prädikate

Zwei **Spezialfälle:**

- Konstanten, als 0-stelligen Funktionen, wird von α immer ein Objekt $u \in U$ zugewiesen.
- 0-stelligen Prädikatensymbolen wird von α ein Wahrheitswert zugewiesen.

Semantik der Prädikatenlogik – Boolesche Operatoren

Die Semantik der Operatoren $\neg, \wedge,$ und $\vee$ ist analog zur Aussagenlogik:

$$\alpha(F \wedge G) = \begin{cases} 1 & \text{Wenn } \alpha(F) = 1 \text{ und } \alpha(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha(F \vee G) = \begin{cases} 1 & \text{Wenn } \alpha(F) = 1 \text{ oder } \alpha(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{Wenn } \alpha(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik – Boolesche Operatoren

Beispiel

Gegeben Struktur α mit

- $\alpha(\mathit{joAnn}) = \mathit{Susi}$, $\alpha(\mathit{musik}) = \mathit{STS}$
- $\alpha(\mathit{mutter}(\mathit{Susi})) = \mathit{Mum}$, $\alpha(\mathit{mutter}(x)) = \mathit{Susi}$,
- $\mathit{Liebt}^{\psi} = \{(\mathit{Mum}, \mathit{STS}), (\mathit{Susi}, \mathit{Mum})\}$

wir wissen schon

1. $\alpha(\mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(\mathit{joAnn}), \mathit{musik})) = \mathit{Liebt}^{\psi}(\mathit{Mum}, \mathit{STS}) = 1$
2. $\alpha(\mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(x), \mathit{musik})) = \mathit{Liebt}^{\psi}(\mathit{Susi}, \mathit{STS}) = 0$

Wir betrachten nun

$$\alpha\,(\mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(\mathit{joAnn}), \mathit{musik}) \wedge \mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(x), \mathit{musik})) =$$
$$\alpha\,(\mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(\mathit{joAnn}), \mathit{musik})) \wedge \alpha\,(\mathit{Liebt}(\mathit{mutter}(x), \mathit{musik})) =$$
$$1 \wedge 0 = 0$$

Semantik der Prädikatenlogik – Quantoren

Für die Semantik der **Quantoren** $\forall$,$\exists$ benötigen wir zusätzliche Notation.

Definition

Für gegebene Struktur $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$, Variable x und $u \in U$ definieren wir die Struktur $\tilde{\alpha}_x^u = (U, \varphi, \psi, \tilde{\xi})$, sodass $x^{\tilde{\xi}} = u$ und $y^{\tilde{\xi}} = y^{\xi}$ für alle anderen Variablen y.

$\tilde{\alpha}_x^u$ setzt also $\tilde{\alpha}_x^u(x) = u$ und lässt α sonst unverändert.

Definition

Um die **Wahrheitswerte** $\alpha(\forall x\,(F))$, $\alpha(\forall x\,(F))$ sind wie folgt definiert:

$$\alpha\,(\forall x\, F) = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } u \in U \text{ gilt } \tilde{\alpha}_x^u(F) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha\,(\exists x\, F) = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } u \in U \text{ gibt sodass } \tilde{\alpha}_x^u(F) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik – Quantoren

Beispiel

Betrachte wieder die Struktur $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$:

- $U = \{JoAnn, Mum, STS\}$
- $musik^\varphi = STS$
  $mutter^\varphi : mutter^\varphi(JoAnn) = Mum,$
  $mutter^\varphi(Mum) = JoAnn,$
  $mutter^\varphi(STS) = STS$
- $Liebt^\psi = \{(Mum, STS), (JoAnn, Mum)\}$
- $x^\xi = Mum$

Uns interessiert:

$$\alpha\,(\exists x\, Liebt(mutter(x), musik))$$

und

$$\alpha\,(\forall x\, Liebt(mutter(x), musik))$$

Semantik der Prädikatenlogik – Quantoren

Beispiel (cont.)

In beiden Fällen betrachte:

- $\tilde{\alpha}_x^{JoAnn}(Liebt(mutter(x), musik))=$
  $Liebt^{\psi}(\tilde{\alpha}_x^{JoAnn}(mutter(x)), \tilde{\alpha}_x^{JoAnn}(musik))=$
  $Liebt^{\psi}(mutter^{\varphi}(\tilde{\alpha}_x^{JoAnn}(x)), STS)=$
  $Liebt^{\psi}(mutter^{\varphi}(JoAnn), STS)=Liebt^{\psi}(Mum, STS) = 1$
- $\tilde{\alpha}_x^{Mum}(Liebt(mutter(x), musik))= \ldots =$
  $Liebt^{\psi}(mutter^{\varphi}(Mum), STS)=Liebt^{\psi}(JoAnn, STS) = 0$
- $\tilde{\alpha}_x^{STS}(Liebt(mutter(x), musik))= \ldots =$
  $Liebt^{\psi}(mutter^{\varphi}(STS), STS)=Liebt^{\psi}(STS, STS) = 0$

Wir erhalten

$$\alpha(\exists x\, Liebt(mutter(x), musik)) = 1$$

$$\alpha(\forall x\, Liebt(mutter(x), musik)) = 0$$

Prädikatenlogik – Begriffe

Elementare Begriffe:

- Eine Struktur α heißt **Modell** für F, wenn $\alpha(F) = 1$. Wir schreiben $\alpha \models F$.
- Eine Formel F heißt **allgemein gültig** oder **Tautologie** wenn alle zu F passenden Strukturen α auch Modelle von F sind.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar** wenn es ein Modell für F gibt, anderenfalls **unerfüllbar**.

Anmerkungen

- F ist unerfüllbar genau dann wenn $\neg F$ eine Tautologie ist.
- Die Aussagenlogik ist ein Spezialfall der Prädikatenlogik: Aussagenlogik entspricht der Prädikatenlogik mit ausschließlich 0-stelligen Prädikaten und ohne Quantoren.

Prädikatenlogik – Begriffe

- Eine Struktur α heißt **Modell** für eine Menge von Formeln $\mathcal{F}$, wenn α eine Modell jeder Formel $G \in \mathcal{F}$ ist. Wir schreiben $\alpha \models \mathcal{F}$.
- Zwei (Mengen von) Formeln F, G sind **semantisch äquivalent** wenn Sie die gleichen Modelle haben. Wir schreiben $F \equiv G$.
- Eine Formel G **folgt** aus einer Formel / einer Menge von Formeln $F/\mathcal{F}$ wenn jedes Modell von $F/\mathcal{F}$ auch Modell von G ist. Wir schreiben $F \models G/\mathcal{F} \models G$.

Zwei Formeln F,G sind semantisch äquivalent ($F \equiv G$) genau dann wenn $F \models G$ und $G \models F$.

Satz (Ersetzungssatz)

Seien F_1 und F_2 zwei semantisch äquivalente Formeln und sei G eine Formel die F_1 als Teilformel enthält. Dann gilt $G \equiv G[F_1/F_2]$.

Erinnerung: $G[F_1/F_2]$ erhält man aus G indem man F_1 durch F_2 ersetzt.

Prädikatenlogik – Fundamentale Äquivalenzen

Es gelten die semantischen Äquivalenzen aus der Aussagenlogik
und weiters gelten folgende Äquivalenzen für Quantoren:

- $\neg\forall x\, F \equiv \exists x\, \neg F$ und $\neg\exists x\, F \equiv \forall x\, \neg F$
- $\forall x\, F \wedge \forall x\, G \equiv \forall x\, (F \wedge G)$ und $\exists x\, F \vee \exists x\, G \equiv \exists x\, (F \vee G)$
- $\forall x\, \forall y\, F \equiv \forall y\, \forall x\, F$ und $\exists x\, \exists y\, F \equiv \exists y\, \exists x\, F$

Wenn G die Variable x nicht enthält gilt auch:

- $\forall x\, F \wedge G \equiv \forall x\, (F \wedge G)$ und $\forall x\, F \vee G \equiv \forall x\, (F \vee G)$
- $\exists x\, F \wedge G \equiv \exists x\, (F \wedge G)$ und $\exists x\, F \vee G \equiv \exists x\, (F \vee G)$

Formalisieren in Prädikatenlogik - Faustregeln

Für $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ können wir die Faustregeln aus der Aussagenlogik weiterverwenden.

Objekte: Werden durch Variablen, Konstanten, oder Funktionen formalisiert.

Eigenschaften: Werden durch einstellige Prädikate formalisiert.

Beziehungen zwischen Objekten werden durch mehrstellige Prädikate formalisiert.

Oft kann aber eine Eigenschaft auch als Objekt formalisiert werden.

Beispiel

Wir wollen ausdrücken, dass ein Objekt rot oder blau sein kann.

1.Lösung: Einstellige Prädikate: $\mathit{Rot}(.), \mathit{Blau}(.)$

2.Lösung: 2-stelliges Prädikate $\mathit{HatFarbe}(.,.)$ und Konstanten $\mathit{rot}, \mathit{blau}$

Welche Formalisierung besser ist hängt vom Kontext ab.

Formalisieren in Prädikatenlogik - Faustregeln

Regeln: Für alle Objekte mit einer Eigenschaft P gilt, dass ...

$$\forall x(P(x) \to \dots)$$

Stichworte: *Alle, Jede, ...* manchmal aber auch nur *„wenn ... dann"*

Existenzaussagen: Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft P, dass ...

$$\exists x(P(x) \land \dots)$$

Stichworte: *existiert, es gibt, (mindestens/hat/...) einen, ...*

Beispiel

Aussage: Jeder Tennisspieler besitzt einen Tennisschläger.

$$\forall x \left(TSpieler(x) \to (\exists y(Schlaeger(y) \land Besitzt(x, y)))\right)$$

oder auch $\forall x \, \exists y \left(TSpieler(x) \to (Schlaeger(y) \land Besitzt(x, y))\right)$.

Prädikatenlogik – Beispiel 1

Aussage: „Wenn zwei Zahlen negativ sind dann ist ihr Produkt positiv“

$$\forall x \forall y \left((Negativ(x) \land Negativ(y)) \rightarrow Positiv(produkt(x, y)) \right)$$

Ein Modell:

- $U = \{-1, 1\}$
- $produkt^{\varphi}$: $produkt^{\varphi}(1, 1) = produkt^{\varphi}(-1, -1) = 1$, $produkt^{\varphi}(-1, 1) = produkt^{\varphi}(1, -1) = -1$
- $Negativ^{\psi} = \{-1\}$, $Positiv^{\psi} = \{1\}$
- $x^{\xi} = 1$, $y^{\xi} = 1$

Ein anderes Modell wären die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, wobei $produkt^{\varphi}(.,.)$ die übliche Multiplikation ist und $Negativ^{\psi} = \mathbb{Z}^{-}$, $Positiv^{\psi} = \mathbb{Z}^{+}$.

Prädikatenlogik – Beispiel 2

Aussage: „Wenn es einen Weg von A nach B gibt und einen Weg von B nach C gibt dann gibt es auch einen Weg von A nach C.“

$$\forall x \forall y \forall z \big((Weg(x, y) \land Weg(y, z)) \rightarrow Weg(x, z) \big)$$

oder semantisch äquivalent

$$\forall x \forall y \forall z \big(\neg Weg(x, y) \lor \neg Weg(y, z) \lor Weg(x, z) \big)$$

Ein **Modell**:

- $U = \{Wien, Berlin, Dresden, Eisenstadt\}$
- keine Funktionen/Konstanten
- $Weg^{\psi} = \{(Wien, Eisenstadt)\}$,
- $x^{\xi} = Wien,\ y^{\xi} = Berlin,\ z^{\xi} = Dresden$

Prädikatenlogik – Beispiel 3

Gegeben: Formel: $F = \forall x \exists y \; Invers(x, y)$
Struktur: $\alpha = (\{0, 1\}, \varphi, \psi, \xi)$ mit $Invers^{\psi}(x, y) = \{(1, 1), (0, 0)\}$.

Frage: Ist α Modell von F?

Um $\alpha(\forall x \exists y \; Invers(x, y))$ zu berechnen betrachte:

- $\alpha_x^0(\exists y \; Invers(x, y))$:
  - $\alpha_{x,y}^{0,0}(Invers(x, y)) = Invers^{\psi}(0, 0) = 1$
  - $\alpha_{x,y}^{0,1}(Invers(x, y)) = Invers^{\psi}(0, 1) = 0$

  $\alpha_x^0(\exists y \; Invers(x, y)) = 1$
- $\alpha_x^1(\exists y \; Invers(x, y))$:
  - $\alpha_{x,y}^{1,0}(Invers(x, y)) = Invers^{\psi}(1, 0) = 0$
  - $\alpha_{x,y}^{1,1}(Invers(x, y)) = Invers^{\psi}(1, 1) = 1$

  $\alpha_x^0(\exists y \; Invers(x, y)) = 1$

$\alpha(\forall x \exists y \; Invers(x, y)) = 1 \Rightarrow \alpha$ ist Modell von F.

Prädikatenlogik – Beispiel
(zum Selbststudium)

Gegeben:

Formel $F = \forall x \forall y \ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x, y), \mathit{plus}(y, x))$

Struktur $\alpha = (\{0, 1\}, \varphi, \psi, \xi)$ mit

$\mathit{Gleich}^{\psi}(x, y) = \{(0, 0), (1, 1)\}$ und

plus^{φ} wie in der folgenden Tabelle gegeben

x	y	$\mathit{plus}^{\varphi}(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Frage: Ist α Modell von F?

Prädikatenlogik – Beispiel

(zum Selbststudium)

Um $\alpha(\forall x \forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x)))$ zu berechnen betrachte:

- $\alpha_x^0(\forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x)))$:
  - $\alpha_{x,y}^{0,0}(\mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) =$ $\mathit{Gleich}^\psi(\mathit{plus}^\varphi(0,0), \mathit{plus}^\varphi(0,0)) = \mathit{Gleich}^\psi(0,0) = 1$
  - $\alpha_{x,y}^{0,1}(\mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) =$ $\mathit{Gleich}^\psi(\mathit{plus}^\varphi(0,1), \mathit{plus}^\varphi(1,0)) = \mathit{Gleich}^\psi(0,1) = 0$

  $\alpha_x^0(\forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) = 0$ [1]
- $\alpha_x^1(\forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x)))$:
  - $\alpha_{x,y}^{1,0}(\mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) = \mathit{Gleich}^\psi(0,1) = 0$
  - $\alpha_{x,y}^{1,1}(\mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) = \mathit{Gleich}^\psi(0,0) = 1$

  $\alpha_x^0(\forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) = 0$

$\alpha(\forall x \forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) = 0 \Rightarrow \alpha$ ist kein Modell von F.

---

[1] Wir könnten schon hier auf $\alpha(\forall x \forall y\ \mathit{Gleich}(\mathit{plus}(x,y), \mathit{plus}(y,x))) = 0$ schließen. Der Vollständigkeit halber betrachten wir aber auch die zweite Substitution.

Barbier-Paradoxon

Frei nach Bertrand Russell:

Der Barbier rasiert alle Männer, nur nicht die, die sich selbst rasieren.

Also eine Konstante *barbier* ein 1-stelliges Prädikat *Mann*(.) und ein 2-stelliges Prädikat *Rasiert*(., .).

$$\forall x\big((Mann(x) \wedge \neg Rasiert(x,x)) \leftrightarrow Rasiert(barbier, x)\big)$$

Jetzt stellt sich die Frage: „Wer rasiert den Barbier?“.

Gehen wir davon aus dass der Barbier ein Mann ist – wir betrachten also Strukturen $\alpha = (\{0,1\}, \varphi, \psi, \xi)$ mit $Mann^{\psi}(barbier^{\varphi})$:

- Wenn $Rasiert^{\psi}(barbier^{\varphi}, barbier^{\varphi})$ gilt dann ist die obere Formel für $x = barbier^{\varphi}$ nicht erfüllt da $(1 \wedge 0) \leftrightarrow 1$ falsch ist.
- Wenn $\neg Rasiert^{\psi}(barbier^{\varphi}, barbier^{\varphi})$ gilt dann ist die obere Formel für $x = barbier^{\varphi}$ nicht erfüllt da $(1 \wedge 1) \leftrightarrow 0$ falsch ist.

Die Formel ist also nur erfüllbar wenn der Barbier kein Mann ist.

Beispiel 5

Wir wollen mehrere Aussagen in Prädikatenlogik formalisieren:

1. Nicht alle Musiker sind berühmt.
2. Es gibt berühmte Personen die keine Musiker sind.
3. Ein Musiker ist genau dann berühmt wenn er gut ist.
4. Es existieren sowohl schlechte als auch gute Musiker.

Die „Objekte“ sind in diesem Fall Personen.

Wir erkennen mehrere Eigenschaften: ist Musiker, ist berühmt, ist gut, ist schlecht.

$\hookrightarrow$ wir nutzen die folgenden Prädikate:

- $Musiker(x)$ …x ist Musiker
- $Beruehmt(x)$ …x ist berühmt
- $Gut(x)$ …x ist gut
- $Schlecht(x)$ …x ist schlecht

Beispiel 5

Wir wollen mehrere Aussagen in Prädikatenlogik formalisieren:

1. Nicht alle Musiker sind berühmt.
2. Es gibt berühmte Personen die keine Musiker sind.
3. Ein Musiker ist genau dann berühmt wenn er gut ist.
4. Es existieren sowohl schlechte als auch gute Musiker.

1. $\neg\forall x(Musiker(x) \rightarrow Beruehmt(x))$ oder
   $\exists x(Musiker(x) \wedge \neg Beruehmt(x))$
2. $\exists x(Beruehmt(x) \wedge \neg Musiker(x))$
3. $\forall x(Musiker(x) \rightarrow (Beruehmt(x) \leftrightarrow Gut(x)))$
4. $\exists x(Musiker(x) \wedge Gut(x)) \wedge \exists y(Musiker(y) \wedge Schlecht(y))$

Beispiel 5

Wir wollen zeigen dass die Aussagen miteinander konsistent sind.

1. $F_1 = \neg\forall x(Musiker(x) \to Beruehmt(x))$
2. $F_2 = \exists x(\neg Musiker(x) \wedge Beruehmt(x))$
3. $F_3 = \forall x(Musiker(x) \to (Beruehmt(x) \leftrightarrow Gut(x)))$
4. $F_4 = \exists x(Musiker(x) \wedge Gut(x)) \wedge \exists y(Musiker(y) \wedge Schlecht(y))$

Um zu zeigen, dass $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$ erfüllbar ist geben wir ein Modell an.

Ein Modell:

$\alpha = (\{Uli, Tom, Bob\}, \varphi, \psi, \xi)$

- $Musiker^{\psi}(x) = \{Uli, Tom\}$
- $Beruehmt^{\psi}(x) = \{Uli, Bob\}$
- $Gut^{\psi}(x) = \{Uli\}$
- $Schlecht\psi(x) = \{Tom\}$
- $x^{\xi} = Tom,\ y^{\xi} = Tom$

Ein anderes Modell:

$\alpha' = (\{0, 1, 2\}, \varphi, \psi, \xi)$

- $Musiker^{\psi}(x) = \{0, 1\}$
- $Beruehmt^{\psi}(x) = \{0, 2\}$
- $Gut^{\psi}(x) = \{0, 2\}$
- $Schlecht\psi(x) = \{1\}$
- $x^{\xi} = 0,\ y^{\xi} = 0$

Prädikatenlogik zweiter Stufe

Unsere Prädikatenlogik heißt auch Prädikatenlogik erster Stufe.
$\hookrightarrow$ Es gibt auch Prädikatenlogik höher Stufen.

Eine Schwäche von Prädikatenlogik erster Stufe, dass Sie nicht über Gruppen/Mengen von Objekten sprechen kann.

Beispiel

Aussage: Es gibt eine Gruppe von Freunden sodass jede Sprache von mindestens einem in der Gruppe gesprochen wird.

Ist die Gruppe durch ein Prädikat *Gruppe*(.) gegeben können wir das wie folgt formulieren:

$$\forall x \left(\mathit{Sprache}(x) \to \exists y \left(\mathit{Spricht}(y, x) \land \mathit{Gruppe}(y) \right) \right) \land \\ \forall x \, \forall y \left(\left(\mathit{Gruppe}(x) \land \mathit{Gruppe}(y) \right) \to \mathit{Freunde}(x, y) \right)$$

Wir können aber die Existenzaussage "Es gibt eine Gruppe" nicht mit Prädikatenlogik erster Stufe formalisieren.

Prädikatenlogik zweiter Stufe

Prädikatenlogik zweiter Stufe:

- ermöglicht Quantifizierung über Prädikate und Funktionen erster Stufe.
- $\forall P^1 \, \exists x \, P(x)$: Für alle 1-stellige Prädikate P gibt es ein Objekt x sodass $P(x)$ wahr ist
- $\exists P^2 \, \forall x \, P(x, x)$: Es gibt ein 2-stelliges Prädikate P das reflexiv ist

Beispiel

Aussage: Es gibt eine Gruppe von Freunden sodass jede Sprache von mindestens einem in der Gruppe gesprochen wird.

Die Aussage kann jetzt formalisiert werden:

$$\exists Gruppe^1 \, \Big(\forall x \, (Sprache(x) \to \exists y \, (Spricht(y, x) \wedge Gruppe(y))) \wedge \\ \forall x \, \forall y \, ((Gruppe(x) \wedge Gruppe(y)) \to Freunde(x, y))\Big)$$

Logiken - Überblick

Es gibt in der Informatik viele verschiedene logische Systeme.

Einige haben wir in der Vorlesung kennengelernt:

- Aussagenlogik kann mehr ausdrücken als Hornlogik.
- Prädikatenlogik erste Stufe kann mehr ausdrücken als Aussagenlogik
- Prädikatenlogik zweiter Stufe kann mehr ausdrücken als Prädikatenlogik erster Stufe

Aber aus großer Ausdruckskraft folgt immer großer Berechnungsaufwand.

- Hornlogik kann sehr effizient berechnet werden.
- Aussagenlogik kann berechnet werden.
- Prädikatenlogik erste und zweiter Stufe kann im Allgemeinen nicht berechnet werden (mehr dazu in der Einheit Berechenbarkeit).