Theoretische Informatik

Turingmaschine (TM)

E. Mehofer

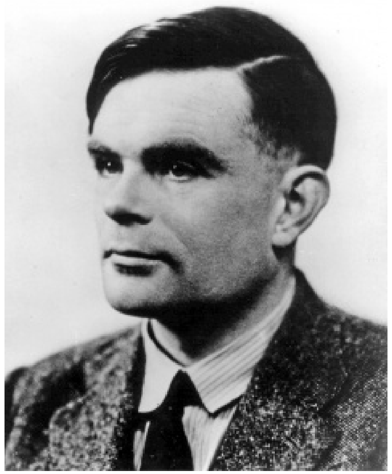
Scientific Computing

Fakultät für Informatik

Universität Wien

Gliederung

- Einführung.
- Komponenten einer TM.
- Arbeitsweise einer TM.
- Formale Definition einer TM.
  - Struktur.
  - Konfiguration.
  - Spezifikation:
    - Turingtafel (Tabelle)
    - Übergangsdiagramm.
- Akzeptierte Sprachen.
- Berechnungen mit einer TM.



Alan Turing

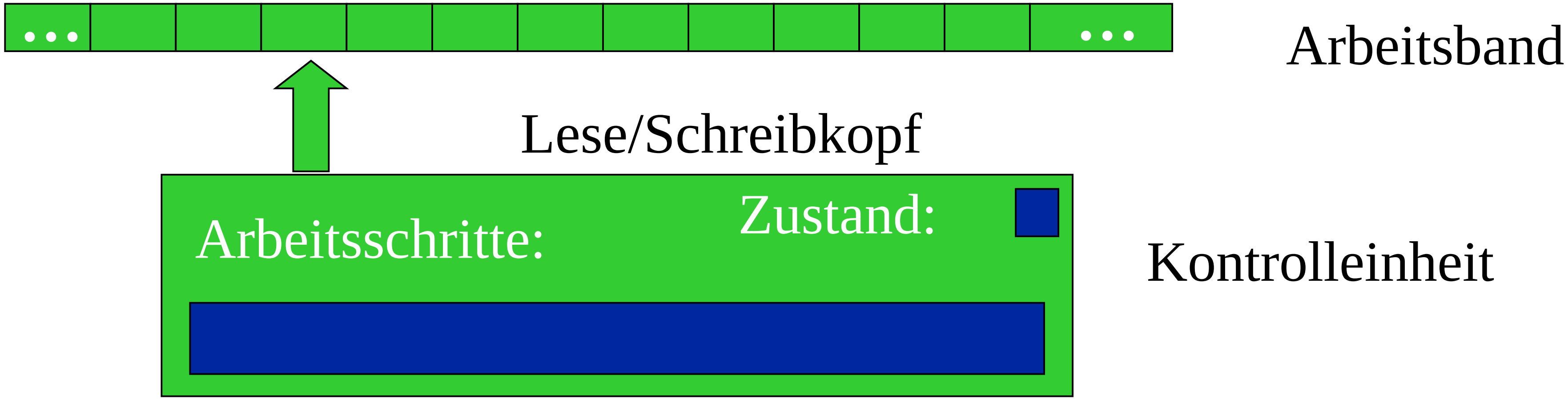
(1912-1954)

Turing Award

Einführung

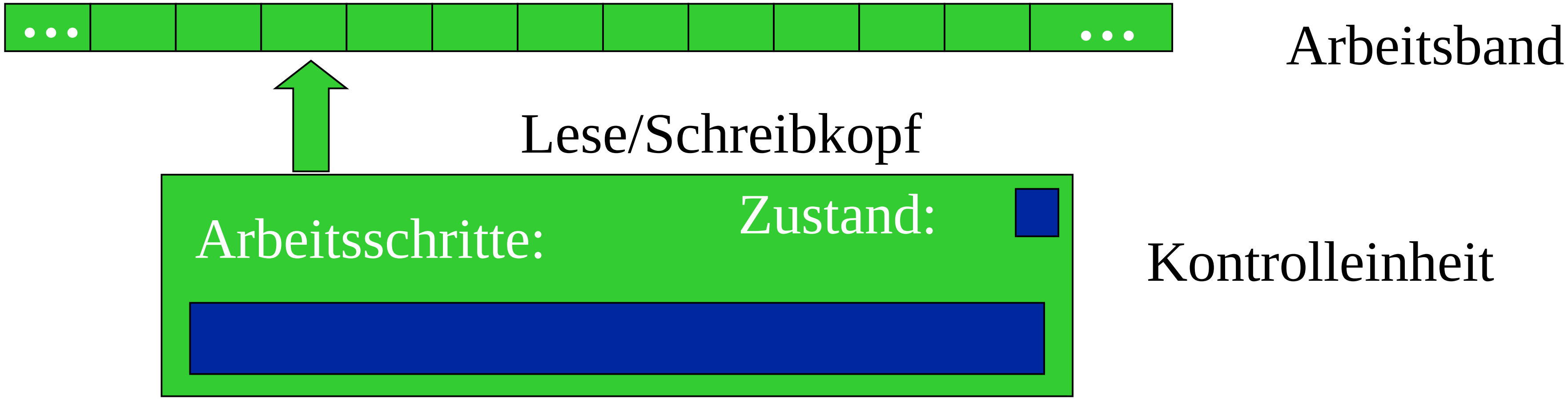
- Eine **Turingmaschine** (TM) ist ein einfaches mathematisches Modell, um Berechnungen durchzuführen. Wurde 1936 von Alan Turing publiziert.
- Mann kann zeigen, dass eine TM jede Funktion berechnen kann, die in einer beliebigen Programmiersprache oder in einem anderen Berechenbarkeitsmodell (z.B. while-Programme, Lambda-Kalkül, etc.) formuliert werden kann.
- Turingmaschinen haben eine große Bedeutung für Überlegungen zu **Berechenbarkeit** und **Entscheidbarkeit**.
- Es gibt viele leicht unterschiedliche Versionen einer TM. Unsere Grundlage ist jene, die hier eingeführt wird.

Aufbau einer Turingmaschine



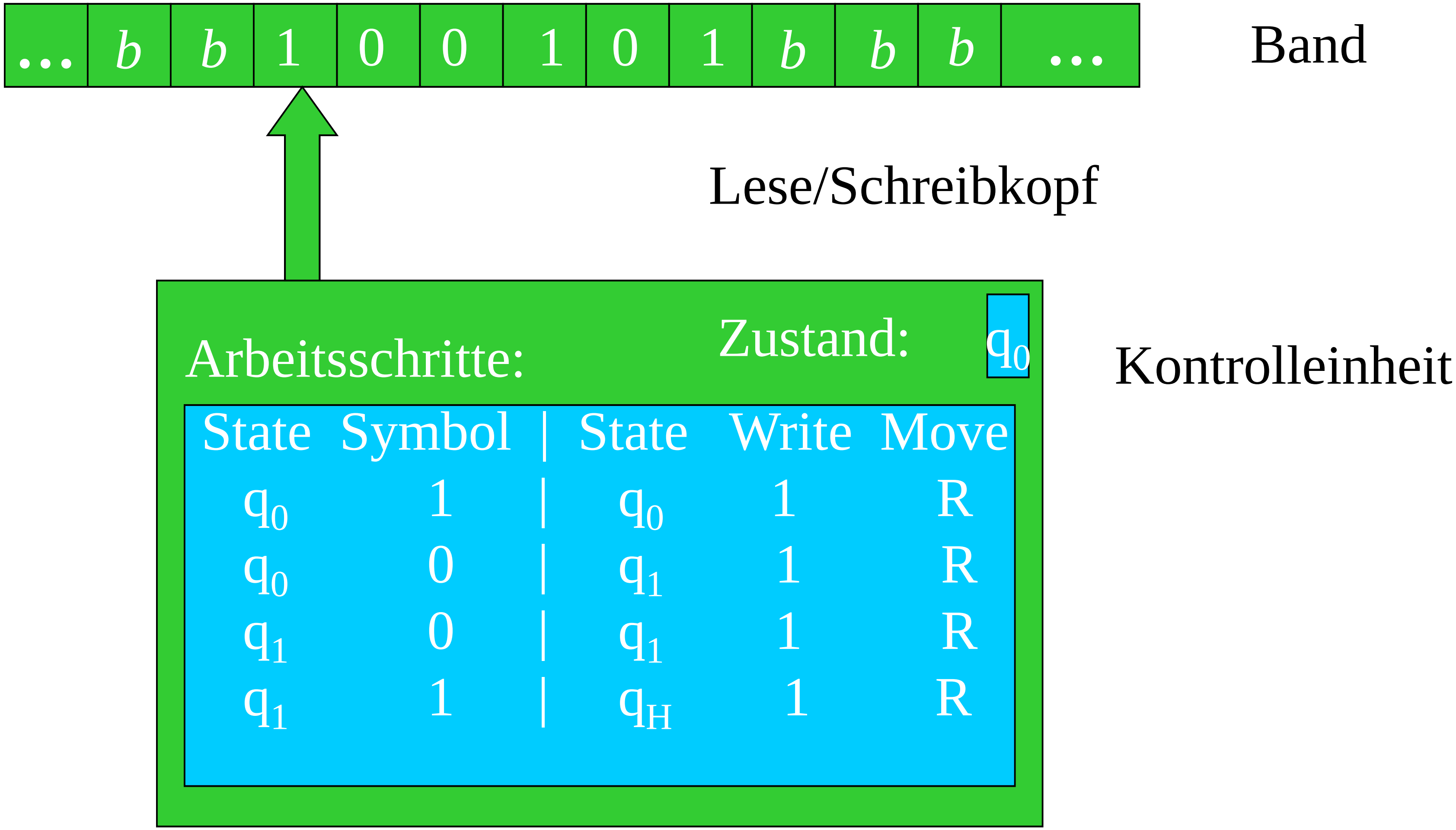
- Eine TM enthält eine **Kontrolleinheit** mit endlich vielen **Zuständen**.
- Die Kontrolleinheit ist über einen **Lese/Schreibkopf** (LS-Kopf) mit einem Speicher verbunden, der durch ein eindimensionales beidseitig unbegrenztes **Arbeitsband** repräsentiert wird.
- Das Arbeitsband ist in Felder unterteilt; in jedes Feld kann höchstens ein Symbol geschrieben werden.

Arbeitsweise einer Turingmaschine

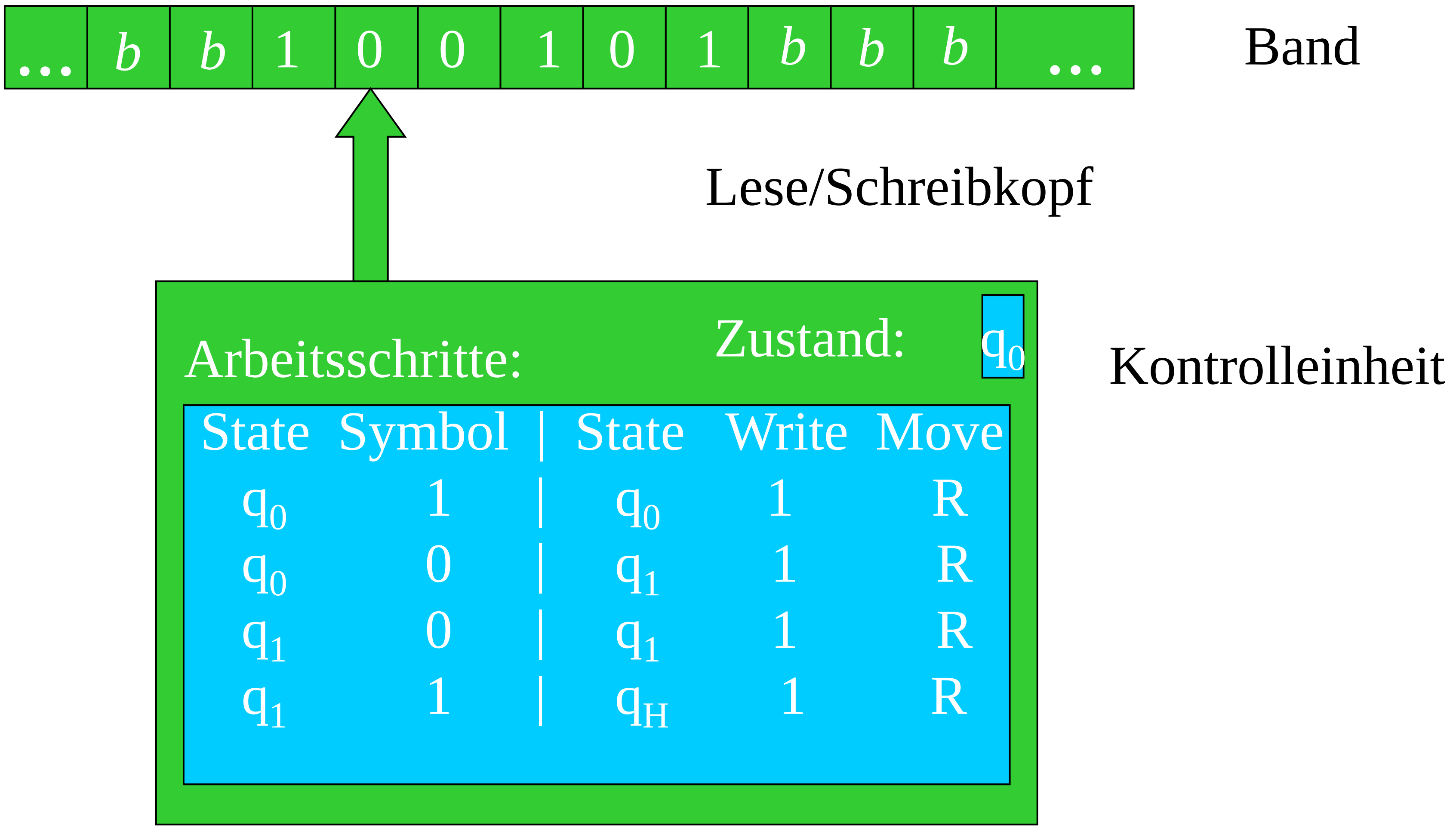


- Ausführung der angegebenen **Arbeitsschritte**.
- Arbeitsschritt ist abhängig vom Inhalt des Feldes unter Lese/Schreibkopf und vom aktuellen Zustand.
- Ein Arbeitsschritt besteht aus:
  - Schreibe ein Symbol in das Feld unter dem LS-Kopf.
  - Bewege LS-Kopf um ein Feld nach links oder rechts.
  - Gehe in einen neuen Zustand.

Beispiel: TM (1)

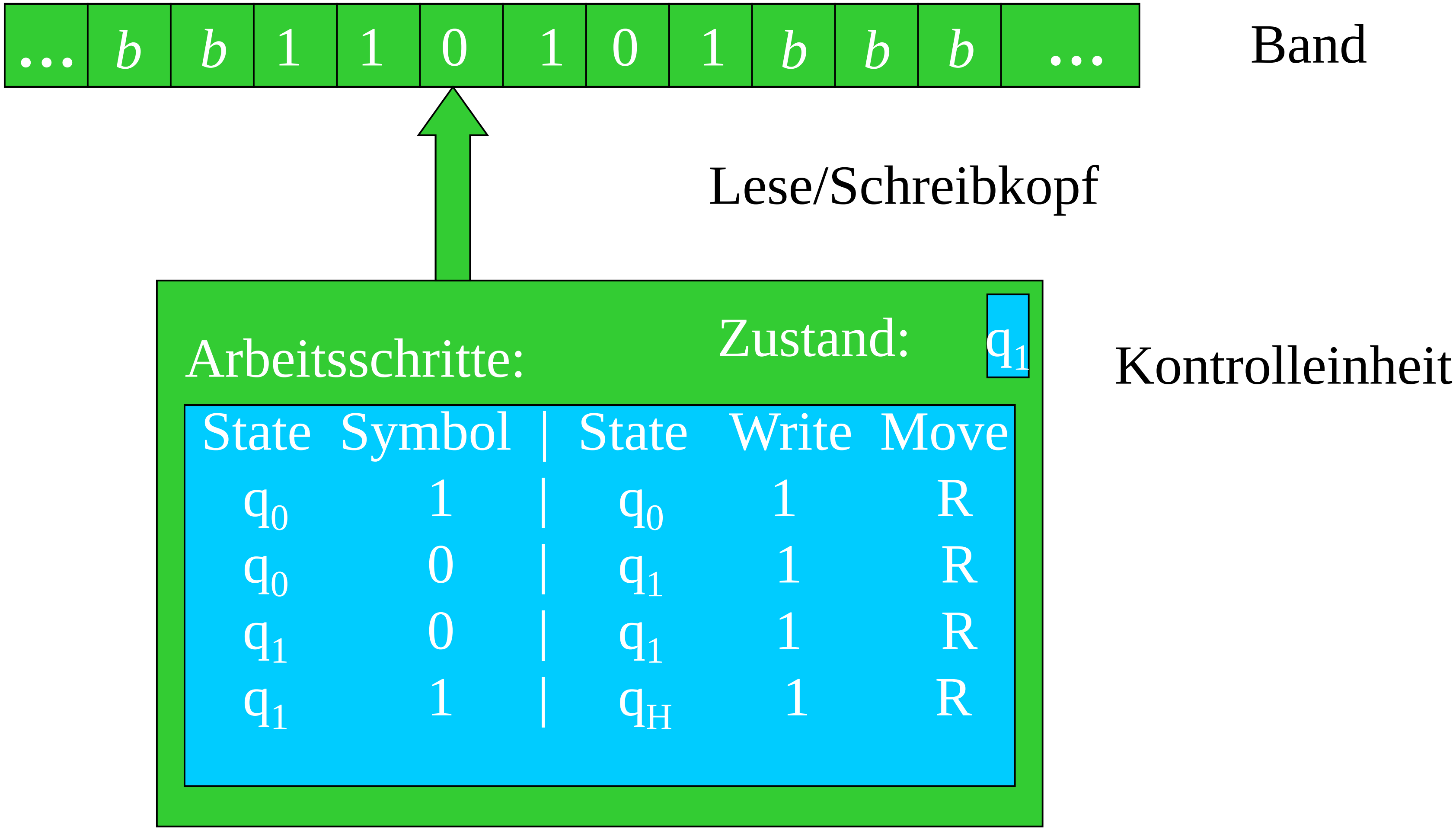


Beispiel: TM (2)

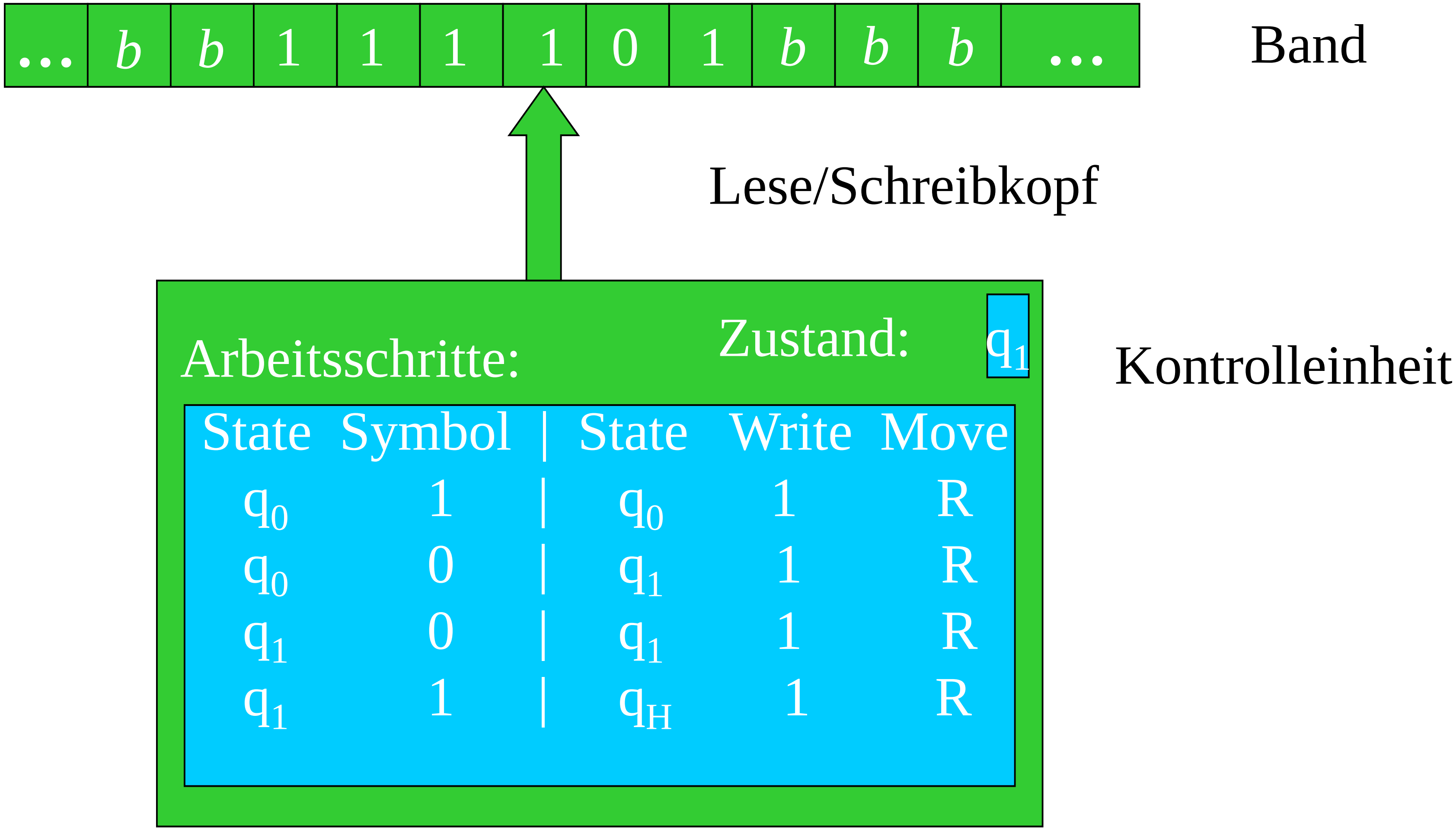


State	Symbol	State	Write	Move
q_0	1	q_0	1	R
q_0	0	q_1	1	R
q_1	0	q_1	1	R
q_1	1	q_H	1	R

Beispiel: TM (3)

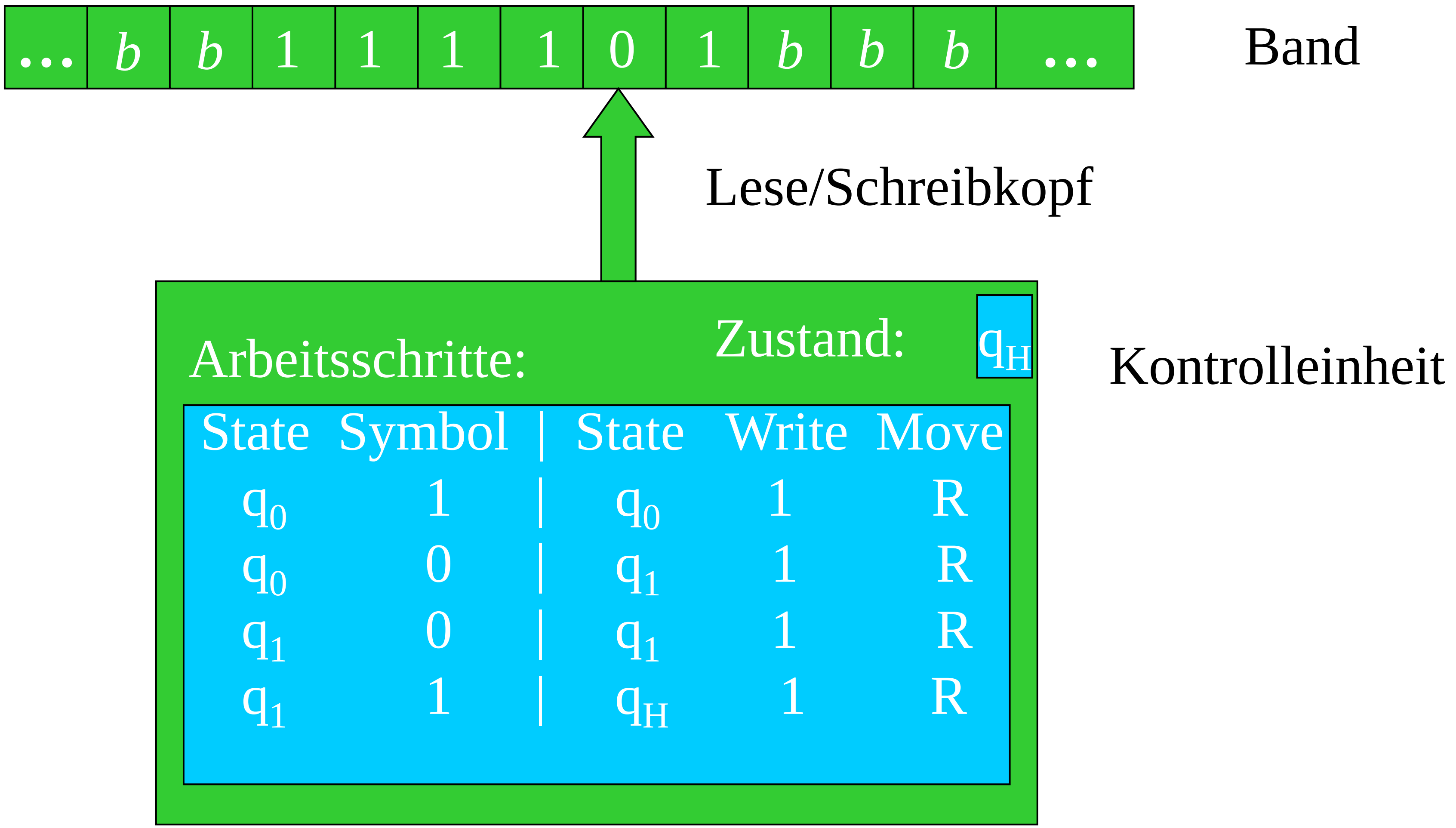


Beispiel: TM (4)



State	Symbol	State	Write	Move
q_0	1	q_0	1	R
q_0	0	q_1	1	R
q_1	0	q_1	1	R
q_1	1	q_H	1	R

Beispiel: TM (5)



State	Symbol		State	Write	Move
q_0	1	|	q_0	1	R
q_0	0	|	q_1	1	R
q_1	0	|	q_1	1	R
q_1	1	|	q_H	1	R

TM: Formale Definition

Def.: Eine Turingmaschine ist ein 7-Tupel $M=(Q,\Sigma,\Gamma,b,\delta,q_0,F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ das **Eingabealphabet** mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- Γ eine endliche Menge von **Bandzeichen**,
- Blank b, ein Symbol aus Γ, um leere Felder zu markieren,
- die **Überführungsfunktion** δ (partiell),

  δ: $(Q - F) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ L, R, N \}$ mit

  L: ein Feld nach links, R: ein Feld nach rechts, N: keine Bewegung,
- q_0 der Startzustand und
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände ist.

TM: Formale Definition - Struktur

Die **Struktur** einer TM $M=(Q,\Sigma, \Gamma,b,\delta,q_0,F)$ kann man sich bestehend aus einer Kontrolleinheit, einem Arbeitsspeicher und einem Lese/Schreibkopf vorstellen.

- Die Kontrolleinheit kann Zustände aus Q annehmen.
- Das Arbeitsband ist in Felder unterteilt, die Symbole aus dem Alphabet Γ enthalten. Zu jedem Zeitpunkt sind höchstens endlich viele Felder beschriftet, die die **Bandinschrift** ergeben.
- Der L/S-Kopf verbindet die Kontrolleinheit mit dem Arbeitsband

TM: Formale Definition - Funktionsweise

Ein **Arbeitsschritt** führt eine Konfiguration in eine Nachfolgekonfiguration wie folgt über:
Gegeben sei eine Konfiguration von M mit einer bestimmten Bandinschrift, sei q der Zustand der Kontrolleinheit, y das Zeichen unter dem L/S-Kopf, und sei (q,y) im Definitionsbereich der Überführungsfunktion mit

- $\delta(q,y) = (q_1,y_1,\mathrm{d})$,

wobei $q_1 \in Q$, $y_1 \in \Gamma$ und $\mathrm{d} \in \{ L,R,N \}$. Dann lässt sich die neue Konfiguration von M wie folgt beschreiben:

1. die Kontrolleinheit geht in den Zustand q_1 über.
2. in das Feld unter dem L/S-Kopf wird y_1 geschrieben.
3. der L/S-Kopf bewegt sich um ein Feld nach links falls d=L, nach rechts falls d=R und bewegt sich nicht falls d=N.
4. die Bandinschrift bleibt bis auf Änderung durch Schritt 2 gleich.

TM: Anhalten

Eine TM **<u>hält</u>**, wenn:

1. es für eine Konfiguration keine Nachfolgekonfiguration gibt (man beachte, dass die δ-Funktion partiell ist, d.h. nicht für alle Eingabezeichen definiert sein muss)

2. die TM in einen Endzustand gelangt (man beachte, dass ein Endzustand keine Nachfolgezustände hat, d.h. ein Endzustand kann nicht mehr verlassen werden)

Um ein Wort zu akzeptieren, muss die TM in einen Endzustand gelangen. Ob dabei das gesamte Wort abgearbeitet bzw. gelesen wurde, ist unerheblich (siehe folg. Folien). Man beachte die Unterschiede gegenüber Automaten.

TM: Formale Definition - Spezifikation (1)

- **Tabelle** (Turingtafel): Beschreibung von Überführungsfunktion δ

  Beispiel:

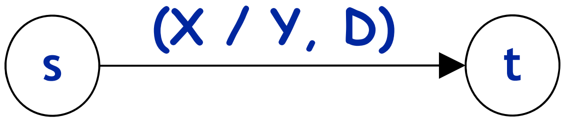
δ	0	1	$\boldsymbol{b}$
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_H, \boldsymbol{b}, N)$
q_1	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	-
q_2	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	-

- **Quintupel:**
  Die Spezifikation der TM erfolgt durch eine Menge von Quintupeln (q,y,q_1,y_1,d), wobei $\delta(q,y) = (q_1,y_1,\mathrm{d})$.

- Für eine **deterministische** Turingmaschine gilt:
  $|\ \delta(q,y)\ | \leq 1$ für alle $(q,y) \in Q \times \Gamma$.

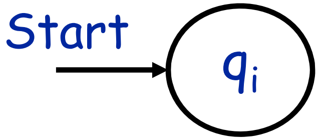
TM: Formale Definition - Spezifikation (2)

- **Übergangsdiagramm**
  - Knoten: Zustände der TM
  - Kanten: Übergänge von q nach p werden markiert mit

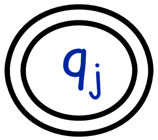


wobei $\delta(s,X)=(t,Y,\mathrm{D})$ mit $\mathrm{D} = \mathrm{L} \vee \mathrm{R} \vee \mathrm{N}$.

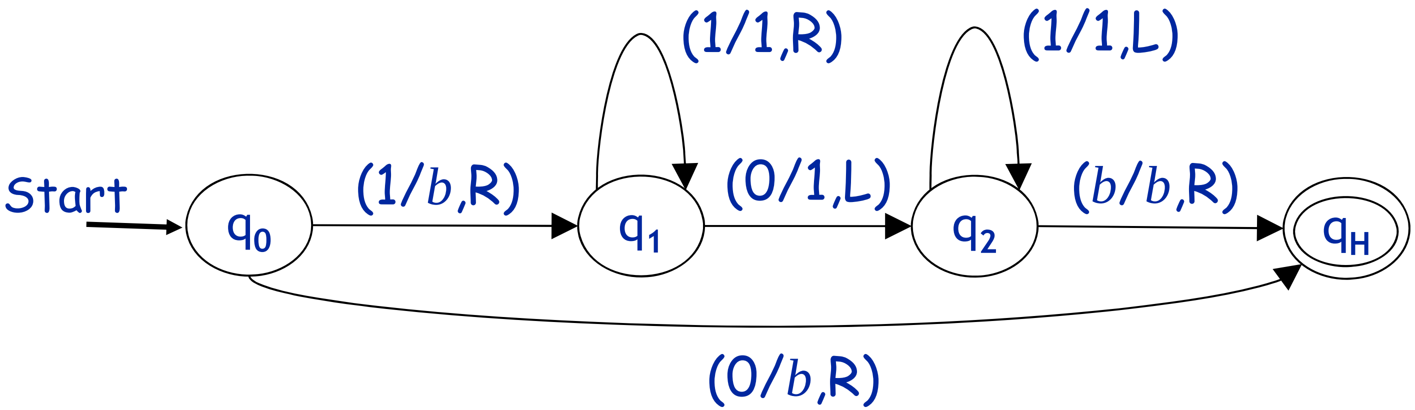
  - Startzustand:



Endzustand:



- **Beispiel:**



Konfigurationen einer TM

Eine Konfiguration einer TM beschreibt eine Momentaufnahme einer TM während der Abarbeitung, d.h. alle aktuellen Werte.

Die **Konfiguration** einer TM M ist daher durch folgende Angaben bestimmt:

- die Bandinschrift, den Zustand der Kontrolleinheit und die Position des L/S-Kopfs.

Notation:

- Sequenz $\boxed{A_1 A_2 \ldots A_{i-1} q\ A_i \ldots A_n}$ bezeichnet folgende Konfiguration:
- Bandinschrift $A_1 \ldots A_n$ und M befindet sich in q und liest A_i (Symbol rechts von q).

Startkonfiguration: $\boxed{q_0\ w}$, unter der Annahme, dass $\mathbf{q_0}$ der Startzustand ist und Eingabewort **w** am Arbeitsband steht.

Konfigurationsrelation $\vdash$

1. $\delta(q,A_i) = (p,B,\mathrm{L})$

   $A_1\, A_2 \ldots A_{i-1}\, q\, A_i\, A_{i+1} \ldots A_n \vdash A_1\, A_2 \ldots p\, A_{i-1}\, B\, A_{i+1} \ldots A_n$

2. $\delta(q,A_i) = (p,B,\mathrm{R})$

   $A_1\, A_2 \ldots A_{i-1}\, q\, A_i\, A_{i+1} \ldots A_n \vdash A_1\, A_2 \ldots A_{i-1}\, B\, p\, A_{i+1} \ldots A_n$

3. Wie üblich, $\vdash^*$ bezeichnet 0,1, oder mehrere Schritte.

Akzeptierte Sprachen

- Die von M **akzeptierte Sprache** ist die Menge aller Wörter $w \in \Sigma^*$, die bei Eingabe von w die Turingmaschine M in einen Endzustand überführt. Eingabe von w bedeutet, daß w auf das Arbeitsband geschrieben wird, der L/S-Kopf das am weitesten links stehende Symbol von w liest und M sich im Zustand q_0 (links und rechts von w sind unendl. viele Blanks).
- Formal ist die durch $M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, \delta, q_0, F)$ **akzeptierte Sprache** definiert wie folgt:

  $L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*$ und

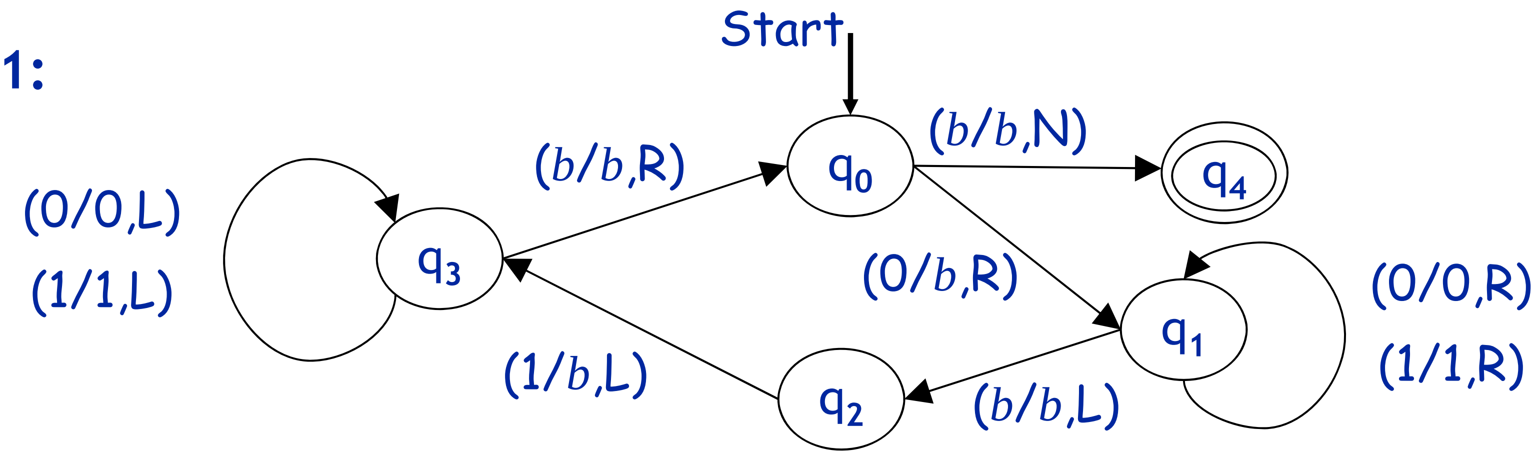
  $$q_0 w \mathrel{\vdash_M^*} a_1 q\, a_2 \text{ mit } q \in F \text{ und } a_1, a_2 \in \Gamma^* \}.$$

- Die Bandinschrift ist nach Akzeptanz unerheblich.

Beispiel Akzeptieren

Man konstruiere eine Turingmaschine M, die die Sprache
$L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$ akzeptiert. Hilfsskizze Band: $\ldots\ b\ \cancel{0}\ \cancel{0}\ 0\ 1\ \cancel{1}\ \cancel{1}\ b\ \ldots$

Lösung 1:



$M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, \delta, q_0, F)$
$Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}$, $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{ b \}$
$F = \{ q_4 \}$,
$\delta = \{(q_0, 0, q_1, b, R)$, *// lösche erste 0;*
$(q_1, 0, q_1, 0, R)$, $(q_1, 1, q_1, 1, R)$, *// laufe nach rechts;*
(q_1, b, q_2, b, L), $(q_2, 1, q_3, b, L)$, *// lösche letzte 1;*
$(q_3, 0, q_3, 0, L)$, $(q_3, 1, q_3, 1, L)$, *// laufe nach links;*
(q_3, b, q_0, b, R), *// beginne wieder von vorne;*
$(q_0, b, q_4, b, N)\}$ *// keine 0 oder 1 vorhanden - akzeptiere;*

Beispiel Akzeptieren - Fortsetzung

Lösung 1: Abarbeitung bei Eingabe **000111**

- $q_0 000111 \vdash q_1 00111 \vdash 0q_1 0111 \vdash 00q_1 111 \vdash 001q_1 11 \vdash 0011q_1 1 \vdash$
  $\vdash 00111q_1 b \vdash 0011q_2 1b \vdash 001q_3 1bb \vdash 00q_3 11 \vdash 0q_3 011 \vdash q_3 0011 \vdash$
  $\vdash q_3 b0011 \vdash$
- $q_0 0011 \vdash q_1 011 \vdash 0q_1 11 \vdash 01q_1 1 \vdash 011q_1 b \vdash 01q_2 1b \vdash 0q_3 1bb \vdash q_3 01 \vdash$
  $\vdash q_3 b01 \vdash$
- $q_0 01 \vdash q_1 1 \vdash 1q_1 b \vdash q_2 1b \vdash q_3 bbb \vdash bq_0 bb \vdash q_4 b$

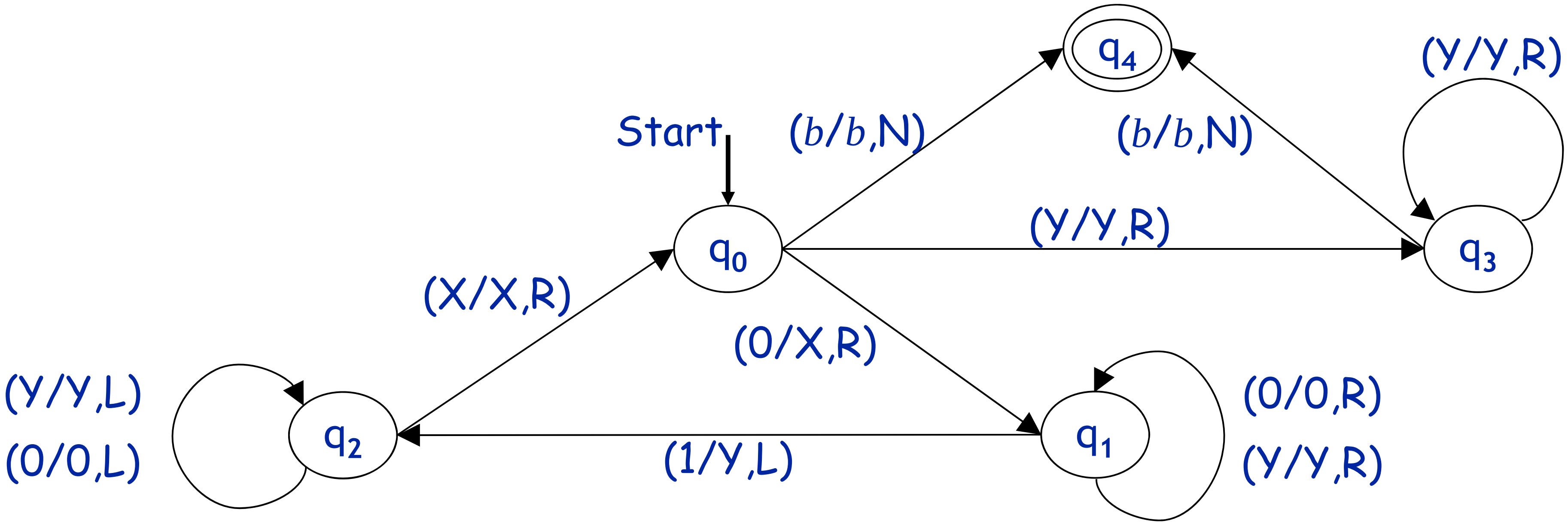
Nochmals Überführungsfunktion:

$\delta=\{(q_0,0, q_1,b,R),$
$(q_1,0, q_1,0,R), (q_1,1, q_1,1,R),$
$(q_1,b, q_2,b,L), (q_2,1, q_3,b,L),$
$(q_3,0, q_3,0,L), (q_3,1, q_3,1,L),$
$(q_3,b, q_0,b,R),$
$(q_0,b, q_4,b,N)\}$

Beispiel Akzeptieren - Fortsetzung

Lösung 2a: Es werden die Symbole X,Y zusätzlich zu Σ verwendet, es wird nicht am Ende des Wortes ersetzt,

Hilfsskizze Band: ... b X X 0 0 Y Y 1 1 b ...



$M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, \delta, q_0, F)$
$Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}$, $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{ X, Y, b \}$
$F = \{ q_4 \}$,

Beispiel Akzeptieren - Fortsetzung

Lösung 2b: Wie Lösung 2a, mit Quintupel spezifiziert.

Hilfsskizze Band: … b X X 0 0 Y Y 1 1 b …

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, \delta, q_0, F)$

$Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}$, $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{ X, Y, b \}$

$F = \{ q_4 \}$,

$\delta = \{(q_0, 0, q_1, X, R)$, *// Beginn der Schleife: Ersetze 0 durch X;*

$(q_1, 0, q_1, 0, R)$, (q_1, Y, q_1, Y, R), *// laufe bis zur ersten 1*

$(q_1, 1, q_2, Y, L)$, *// und ersetze 1 durch Y;*

(q_2, Y, q_2, Y, L), $(q_2, 0, q_2, 0, L)$, *// laufe zurück zum ersten*

(q_2, X, q_0, X, R) *// X u. wiederhole Schleife;*

(q_0, Y, q_3, Y, R), *// keine 0 mehr vorhanden, akzeptiere*

(q_3, Y, q_3, Y, R), *// falls auch keine 1 mehr vorhanden ist;*

(q_3, b, q_4, b, N),

$(q_0, b, q_4, b, N)\}$ *// akzeptiere auch falls keine 0 und 1;*

Berechnungen mit Turingmaschinen

- Turingmaschinen können zur Berechnung von Funktionen benutzt werden.
- Zu Beginn einer Berechnung wird das Argument für die zu berechnende Funktion auf dem Band notiert. Dies ist die **Eingabe** für die TM. Wenn die TM nach endlich vielen Schritten im Endzustand hält, dann ist die Bandinschrift zu diesem Zeitpunkt die **Ausgabe** der TM und bezeichnet den Funktionswert.
- Codierung von natürlichen Zahlen *nat*: $\mathbb{N}_0 \rightarrow \{ 1 \}^*$
  d.h. eine natürliche Zahl $i \geq 0$ wird durch die Zeichenfolge 1^i repräsentiert – eine Aufeinanderfolge von 1er.

Berechnungen mit Turingmaschinen: Beispiel 1

- Sei f: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls x durch 3 teilbar} \\ \text{undefiniert sonst} \end{cases}$

  Man konstruiere eine TM, die f berechnet.

- **Lösung:**

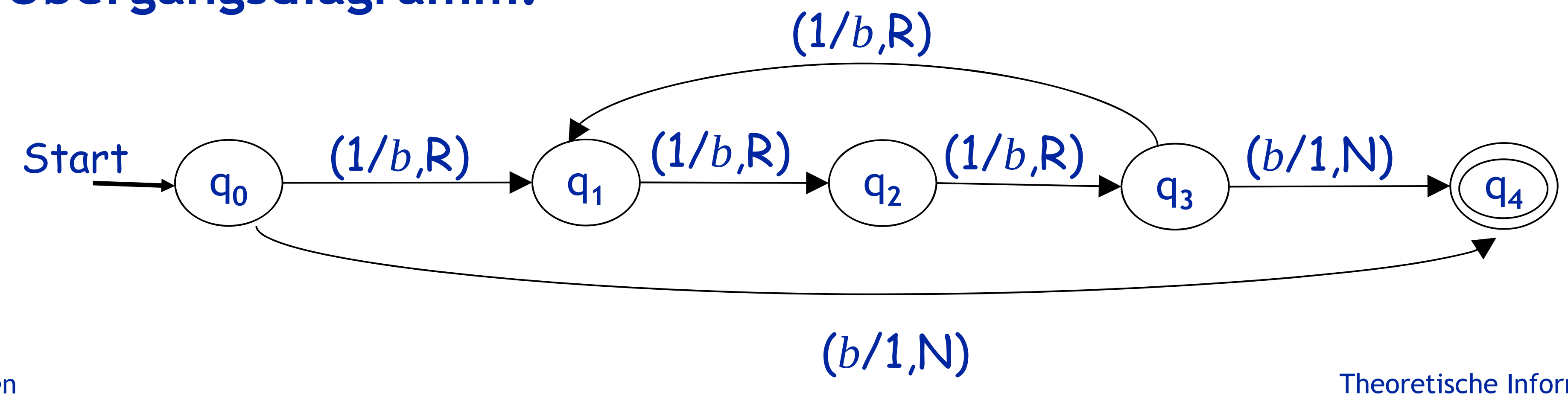
  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, \delta, q_0, F)$

  $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}$, $\Sigma = \{ 1 \}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{ b \}$

  $F = \{ q_4 \}$,

  $\delta = \{(q_0,1, q_1,b,R), (q_1,1, q_2,b,R), (q_2,1, q_3,b,R), (q_3,b, q_4,1,R),$
  $(q_3,1, q_1,b,R), (q_0,b, q_4,1,N)\}$

- **Übergangsdiagramm:**



Berechnungen mit Turingmaschinen: Beispiel 2

- Gegeben sei $f\colon \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0^l$ mit $f(m_1,m_2\ldots,m_k)=(n_1,n_2\ldots n_l)$
- Dann wird TM_f mit folgendert initialen Konfiguration gestartet:
  - Bandinschrift: $\ldots b\ 1^{m_1}\ 0\ 1^{m_2}\ 0 \ldots 0\ 1^{m_k}\ b \ldots$ (Verwendung der Codierungsfunktion *nat*)
  - L/S-Kopf über am weitesten links stehenden Symbol $\neq b$
- Terminiert TM_f, dann soll folgende Konfiguration gegeben sein:
  - Bandinschrift: $\ldots b\ 1^{n_1}\ 0\ 1^{n_2}\ 0 \ldots 0\ 1^{n_l}\ b \ldots$ (Verwendung der Codierungsfunktion *nat*)
  - L/S-Kopf soll wieder über am weitesten links stehenden Symbol $\neq b$ positioniert werden.

Berechnungen mit Turingmaschinen: Beispiel 2

- Sei $g: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $g(m,n)=m+n$.

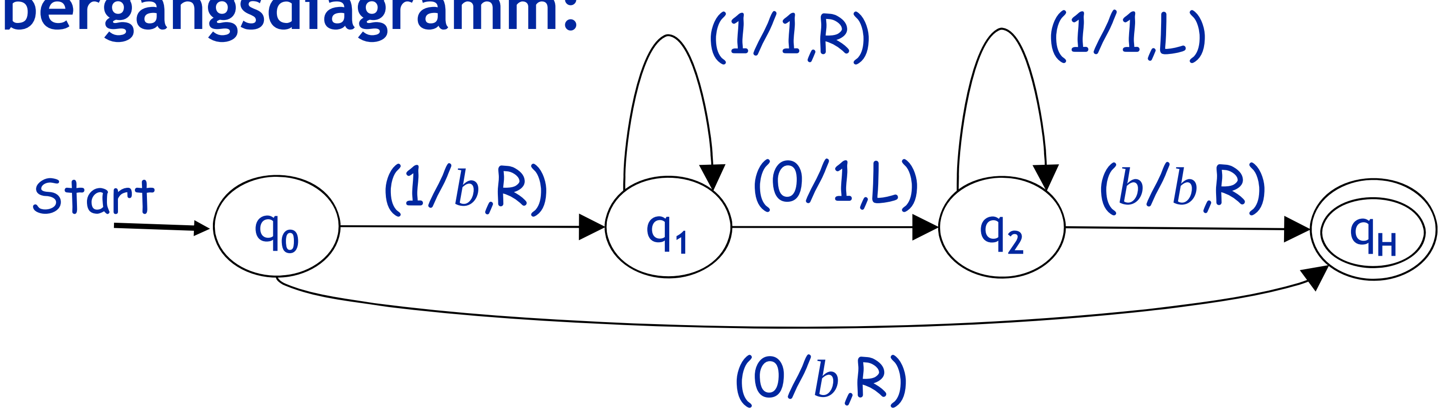
  Man konstruiere eine TM, die g berechnet.
- **Lösung:** $(\ldots b\ 1^m\ 0\ 1^n\ b\ldots)$

  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, \delta, q_0, F)$

  $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_H \}$, $\Sigma = \{ 1,0 \}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{ b \}$

  $F = \{ q_H \}$,

  $\delta=\{ (q_0,0, q_H,b,R), (q_0,1, q_1,b,R), (q_1,1, q_1,1,R), (q_1,0, q_2,1,L),$
  $(q_2,1, q_2,1,L), (q_2,b, q_H,b,R)\}$
- **Übergangsdiagramm:**



Linear beschränkter Automat

- Eine **linear beschränkter Automat** (LBA) ist eine nicht-deterministische Turingmaschine, die folgende zwei Bedingungen erfüllt:
  1. Das Eingabealphabet beinhaltet zwei Spezialsymbole $\$_{left}$ und $\$_{right}$ für linke und rechte Endmarkierungen des Eingabebandes.
  2. Der LBA darf sich nur innerhalb von $\$_{left}$ und $\$_{right}$ bewegen und darf $\$_{left}$ bzw. $\$_{right}$ nicht überschreiben.

- LBA sind Chomsky Typ-1 Akzeptoren.